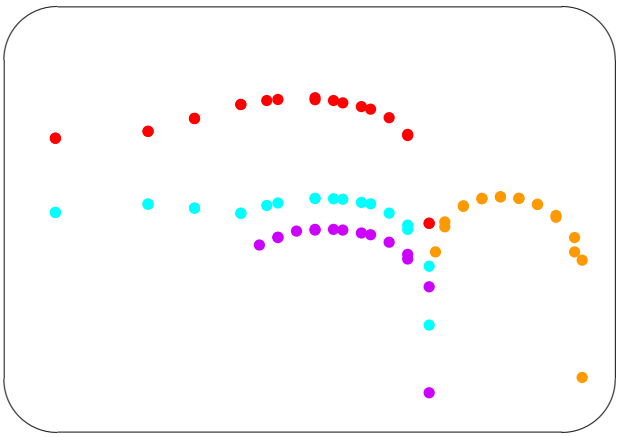

Diplomarbeit

Über die Synchronisation eines gekoppelten Systems aus mechanischen und quantenoptischen Elementen

am Institut für Physik der Universität Potsdam

Autorin: Maria Martin

Betreuer und erster Gutachter: P.D. Dr. Carsten Henkel
Zweiter Gutachter: Prof. Dr. Arkadi Pikovski

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**
1.1 Opto-Mechanischer Oszillator 1
1.2 Synchronisation 4
1.3 Aufbau der Arbeit 6

2 Grenzzyklus **9**
2.1 Beschreibung des OMO 9
2.1.1 Skalierung der Systemvariablen 11
2.2 Der Grenzzyklus 12
2.2.1 Der Strahlungsdruck 12
2.2.2 Selbstkonsistenz: Vergleich 13
2.2.3 Regimes im Phasenraum der Parameter $\frac{\gamma}{g^2}$ und Δ 19
2.3 Numerische Simulation des Systemverhaltens 22
2.3.1 Parameter aus dem Vahala-Paper (Parametersatz A) . . . 22
2.3.2 Dynamik für verschiedene Parametersätze 25
2.4 Auswertung: relevante Seitenbänder 30
2.4.1 Analytische Auswertung 30
2.4.2 Graphische Auswertung 33
2.4.3 Höhere Harmonische 39

3 Synchronisation **41**
3.1 Theorie zur Synchronisation 41
3.2 Synchronisation des OMO 45

4 Synchronisation und Rauschen **55**
4.1 Theorie zum Rauschen 55
4.1.1 Heisenberg-Langevin Formalismus 55
4.1.2 Von Langevin- zu Fokker-Planck-Gleichungen 58
4.1.3 Synchronisation mit Rauschen 60
4.1.4 Analyse eines Beispielsystems 63
4.2 Rauschen beim OMO 66
4.2.1 Die Langevingleichungen 66
4.2.2 Eine Fokker-Planck Gleichung für die Phasendifferenz . . 66
4.2.3 Synchronisationsanalyse 70
4.2.4 Quantifizierung der verschiedenen Rauscheinflüsse 73

5 Zusammenfassung **77**

A Näherung kleiner Besselargumente **79**
A.1 0. Ordnung in B 79
A.2 2. Ordnung in B 83

I
Einleitung

Die vorliegende Diplomarbeit ist die Dokumentation eines kleinen Forschungsprojektes, das sich die Untersuchung eines in der Quantenoptik prominenten optisch-mechanischen Systems auf seine Synchronisationseigenschaften zum Ziel gesetzt hat. Somit liegt ein mehrere Disziplinen der Physik, nämlich Quantenoptik und nichtlineare Dynamik, umfassendes Thema vor. In dieser Einleitung soll nun das System kurz vorgestellt (Abschnitt 1.1) und das Phänomen der Synchronisation qualitativ erläutert werden (Abschnitt 1.2).

1.1 Opto-Mechanischer Oszillator

Wir wollen einen **O**pto-**M**echanischen **O**szillator (**OMO**) beschreiben. Es handelt sich um ein optisches System (z.B. einen Hohlraum) mit veränderlicher Länge. Wird Licht in dieses System eingekoppelt, so beeinflusst der Lichtdruck den mechanischen Freiheitsgrad. Gleichzeitig verändert sich mit der Länge des optischen Hohlraumes auch dessen Resonanzfrequenz.
Ein solches System wird durch folgenden Hamiltonoperator (in Einheiten von $\hbar$) beschrieben:

$$H = \underbrace{\omega_c a^\dagger a}_{H_{\text{cav}}} + \underbrace{\mathrm{i}\kappa\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_l t}a^\dagger - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_l t}a\right)}_{H_{\text{pump}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(p^2 + x^2\right)}_{H_{\text{mech}}} \underbrace{- g\, x\, a^\dagger a}_{H_{\text{ww}}} .$$

Dabei sind x und p die dimensionslosen und passend umskalierten Orts- und Impulsoperatoren des mechanischen Oszillators, während a und $a^\dagger$ die im Ruhezustand resonante Lichtmode (ω_c) im Hohlraum beschreiben. Es gibt einen Pumpterm für eine kohärente Eingangsleistung an ω_l mit der Amplitude κ. Die Kopplug zwischen der mechanischen und optischen Komponente des OMO wird durch einen Wechselwirkungsterm Hww mit der Kopplungskonstante g beschrieben [7].

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich aus der Heisenberggleichung $\dot{\mathrm{O}} = -\mathrm{i}\,[\mathrm{O}, H]$ mit $[x, p] = \mathrm{i}$ und $\left[a, a^\dagger\right] = 1$ zu

$$\ddot{x} = -x - \gamma\dot{x} + g a^\dagger a + \Gamma_x \tag{1.1}$$

$$\dot{a} = -(\kappa + \mathrm{i}\underbrace{(\omega_c - \omega_l)}_{=:\Delta})a + \mathrm{i}gxa + \kappa + \Gamma_a \tag{1.2}$$

Dabei sind zunächst phänomenologisch Dämpfungsterme[1] γ und κ und entsprechende Rauschterme Γ eingeführt worden. Die Rauschterme sind nötig,

[1] Der optische Dämpfungsterm κ ist wegen der gewählten Skalierung mit der Amplitude der Pumpe identisch.

damit die Kommutatorrelationen zu allen Zeiten gültig bleiben, wie es das **F**luktuations - **D**issipations - **T**heorem (**FDT**) vorschreibt.
Die Nichtlinearität in den Gleichungen (1.1) und (1.2) sitzt ausschließlich in den Kopplungstermen. In Gl.(1.1) ist eine intensitätsabhängige Kraft $ga^\dagger a$ enthalten. Sie beschreibt die Wirkung des Lichtdrucks auf den mechanischen Oszillator, der von der Intensität des Feldes im Hohlraum abhängt. Diese Intensität wiederum wird neben der Verstimmung Δ zwischen Resonanz ω_c und Pumplicht ω_l auch wieder von der Länge des Hohlraums bestimmt: In Gleichung (1.2) ist die entsprechende längenabhängige Frequenzmodulation igxa enthalten.

Anregung und Kühlung: Die Wechselwirkung zwischen der optischen und der mechanischen Komponente des OMO kann zu zwei gegensätzlichen Effekten führen. Abhängig von der optischen Verstimmung Δ kann einerseits die thermische Bewegung des mechanischen Oszillators durch den Lichtdruck gedämpft werden. Andererseits kann parametrische Anregung einer selbstinduzierten Oszillation verursacht werden.
Eine anschauliche Erklärung für diese Effekte liefert folgendes Bild (Abb. 1.1): Durch die Oszillation des Hohlraumes mit einer Frequenz Ω werden Seitenbänder (Stokes und Anti-Stokes) im Lichtfeld verursacht. Bei einer Pumpe, die gegenüber der Hohlraumresonanz blauverschoben ist, liegt das rote Seitenband $\omega_l - \Omega$ (möglicherweise gut) in der Resonanz. Die überschüssige Energie gibt dieses (energieärmere) Band dann an die Oszillatorbewegung ab. Zur Anregung braucht man also eine negative Verstimmung $\Delta \approx -\Omega < 0$. Diese Situation ist in Abb. 1.1 dargestellt[2].

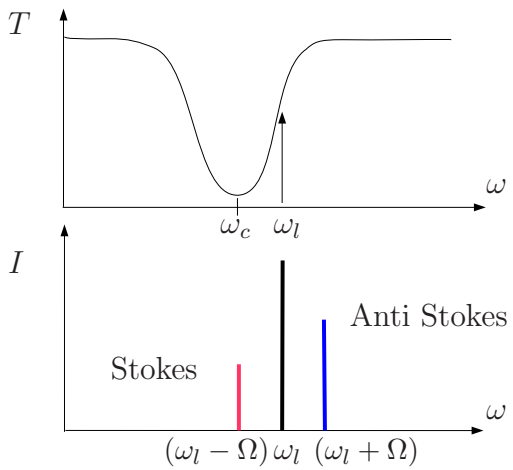

Abbildung 1.1: Anregung: Die Energie aus der Pumpe, die nicht im Hohlraum überleben kann, weil nur das energieärmere Stokes-Band in der Resonanz liegt, geht in die mechanische Oszillation.

Umgekehrt liegt bei einer Pumpe, die gegenüber der Hohlraumresonanz rotverschoben ist, das blaue Seitenband $\omega_l + \Omega$ (möglicherweise gut) in der Reso-

[2] Grafiken wie die in Abb. 1.1 wurden mit OpenOffice Draw erstellt.

nanz. Die Energie um zu Überleben zieht sich dieses (energiereichere) Band dann aus der Oszillatorbewegung. Zur Kühlung braucht man also $\Delta \approx \Omega > 0$.

In dieser Arbeit konzentrieren wir uns auf die Anregung einer Oszillation. In diesem Fall nämlich beschreiben die Bewegungsgleichungen (1.1) und (1.2) einen dissipativen mechanischen Oszillator, der durch die konstante Energiezufuhr durch das Licht eine zusätzliche negative Dämpfung erfährt. So wird das autonome System parametrisch zu einer stabilen Oszillation angeregt und es erhält einen Grenzzyklus. Wir möchten den so konstruierten selbsterregten Oszillator auf Synchronisation untersuchen.
Zunächst aber sollen mögliche Realisierungen des bisher nur abstrakt beschriebenenen OMO vorgestellt werden.

Mögliche Realisierung nach Vitali: Die Gruppe um D. Vitali hat in den letzten Jahren einige Publikationen herausgebracht, die sich mit verschiedenen Effekten (u.a. Verschränkung makroskopischer Objekte [8] oder Verschränkung eines beweglichen Spiegels mit einem Lichtfeld [18]) an Variationen eines einfachen Systems beschäftigen. Dieses einfache System besteht aus einem optischen Hohlraum mit einem beweglichen Spiegel wie in Abb. 1.2 schematisch dargestellt. Dieser bewegliche Spiegel ist der mechanische Oszillator im System und über den Lichtdruck bzw. die Veränderung der Resonanzfrequenz des Hohlraumes an das Lichtfeld gekoppelt. Ähnliche Systeme werden auch in [1] und [4] zur

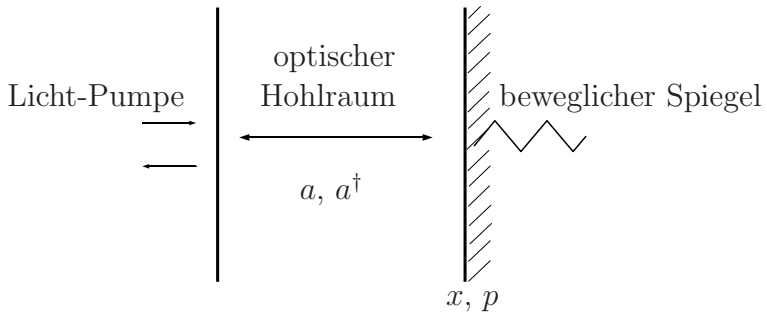

Abbildung 1.2: Schematische Darstellung des OMO in der Realisierung nach Vitali.

Untersuchung von selbstinduzierter Kühlung eines makroskopischen Oszillators auf wenige Kelvin betrachtet.

Mögliche Realisierung nach Vahala: Die Gruppe um K.J. Vahala untersucht einen OMO in der Form eines Toroids aus Quarz, Abb. 1.3, siehe zum Beispiel [2], [6] oder [13]. In diesen Toroid wird über evaneszente Wellen aus einem Lichtleiter ein Lichtfeld an ω_l eingekoppelt. Dieses Lichtfeld regt eine Biegungs-Mode im Toroid an. Dadurch entstehen Seitenbänder im Ausgangssignal.
Inwieweit diese beiden Realisierungen durch dieselben Gleichungen beschrieben werden können, wird in Abschnitt 2.1 beschrieben.

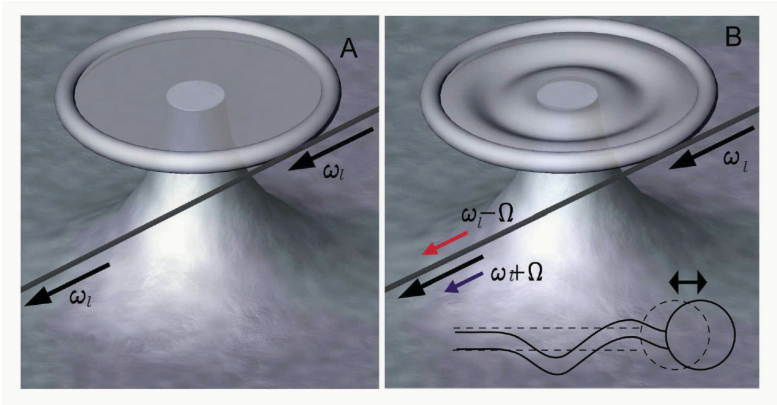

Abbildung 1.3: Toroidstruktur wie in der Gruppe um K.J. Vahala untersucht. Links im Ruhezustand, rechts mit einer angeregten Biegungs-Mode. Bildquelle: [13]

1.2 Synchronisation

Die theoretischen und methodischen Hintergründe zur Synchronisation für diese Diplomarbeit wurden dem Buch von Pikovsky, Rosenblum und Kurths [11] entnommen. Hier erläutern wir das Phänomen der Synchronisation einleitend rein qualitativ.

Synchronisation bedeutet in der Übersetzung aus der altgriechischen Wortwurzel soviel wie „mit gemeinsamer Zeit“Allgemein wird dieser Begriff verwendet, um zwei oder mehr Systeme, die in irgendeiner Weise „im Gleichklang“ sind, zu charakterisieren. In der Natur tritt dieses Phänomen in vielfältiger Weise zu Tage: Sei es in der belebten Natur bei der synchronisierten Neuronenaktivierung, einem sozialen Gefüge wie den rhythmisch applaudierenden Zuschauern in der Oper oder in der unbelebten Natur, wenn beispielsweise zwei über eine gemeinsame Aufhängung schwach gekoppelte Pendeluhren ihre Schwingungen angleichen.

Selbsterregter Oszillator, Beispiel Pendeluhr: Das Beispiel der Pendeluhren ist nun gut geeignet, die grundlegenden Eigenschaften von Synchronisation zu beschreiben. Zunächst klären wir, welche Systeme überhaupt synchronisieren können: Es sind selbsterregte Oszillatoren. Diese vollführen nichtabklingende stabile Oszillationen in autonomen dissipativen Systemen. Die Pendeluhr als Modell für einen solchen selbsterregten Oszillator ist in der physikalischen Wirklichkeit ein dissipatives System. Es ist autonom, da keine explizit zeitabhängige Einwirkung auf die Pendeluhr stattfindet. Das System muss außerdem nichtlinear sein, da ein lineares System mit periodischer Bewegung automatisch konservativ wäre. Ein dissipatives System kann aber dennoch stabil an einem Grenzzyklus oszillieren, sofern eine kontinuierliche Energiequelle die Verluste ausgleicht. Bei einer Pendeluhr übernimmt diese Funktion das Gewicht des Pendels.

Die Tatsache, dass das System autonom ist, ist von entscheidender Bedeutung. Auf dem Grenzzyklus, an dem das System stabil oszilliert, ist dann nämlich die Phase frei. Das bedeutet, dass man die Pendeluhr in ihrer Oszillation zu einem beliebigen Zeitpunkt anhalten kann. Lässt man sie wieder frei, so geht die Bewegung genauso weiter, als hätte man nicht eingegriffen. Dies ist möglich, weil die konstante Energiezufuhr durch das Gewicht eine parametrische Anregung liefert, die nur vom Systemzustand, nicht aber von der Zeit abhängt.

Die Phasenfreiheit ist es nun, die Synchronisierbarkeit bedingt. Wird, um bei unserem Beispiel zu bleiben, eine äußere Triebkraft an die Pendeluhr gekoppelt, indem die Aufhängung in regelmäßige Schwingungen versetzt wird, so kann sich die Phase des selbsterregten Oszillators, der Pendeluhr also, diesen regelmäßigen Schwingungen anpassen. Die Phase ist eine neutral stabile Variable. Nach einer Übergangsphase wird unter bestimmten Voraussetzungen ein Regime der Synchronisation erreicht, in dem die Pendeluhr im Gleichtakt mit der äußeren Triebkraft schwingt.

Der OMO als selbsterregter Oszillator: Synchronisieren kann also ein selbsterregter Oszillator mit einer periodischen äußeren Triebkraft, oder auch zwei oder mehr schwach gekoppelte selbsterregte Oszillatoren.
Ein OMO wie in Abschnitt 1.1 ist nun ein selbsterregter Oszillator, denn er erfüllt die oben genannten Kriterien. Es handelt sich um ein dissipatives nichtlineares System, das autonom ist und - in bestimmten Parameterbereichen (siehe Abschnitt 2.2.3) - stabile Oszillationen auf einem Grenzzyklus vollführt. Der mechanische Oszillator ist dabei, genau wie ein Pendel ohne Gewicht, noch kein selbsterregter Oszillator. Erst die parametrische Anregung durch den Lichtdruck, analog zum Gewicht der Pendeluhr, macht einen Grenzzyklus möglich.

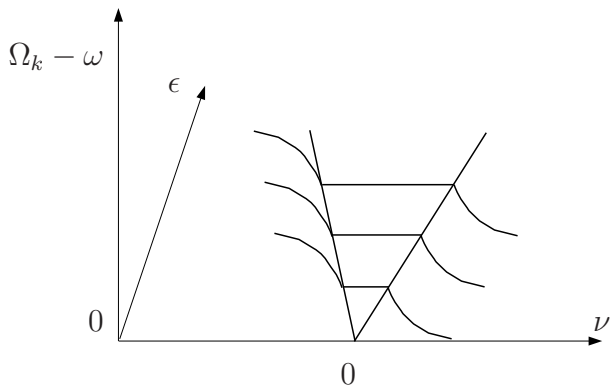

Abbildung 1.4: Arnoldzunge: Synchronisationsplateaux werden für eine variable Kopplungsstärke ϵ aufgetragen.

Nomenklatur: Ein selbsterregte Oszillator hat eine sogenannte natürliche Frequenz Ω. Wird er einer externen periodischen Triebkraft von der Frequenz ω ausgesetzt, so schwingt er an einer anderen Frequenz, der „Frequenz mit Kopplung“ Ω_k. Diese Frequenz hängt sowohl von der Verstimmung $\nu := \omega - \Omega$ der Triebkraft gegenüber der natürlichen Frequenz, als auch von der Kopplungsstärke ϵ ab.

Trägt man die Differenz zwischen tatsächlicher Frequenz und Trieb-Frequenz $\Omega_k - \omega$ über der Verstimmung ν auf, so ergibt sich ein charakteristisches Synchronisationsplateau, an dem die Differenz $\Omega_k - \omega$ verschwindet. Dieses Plateau bezeichnet dann den Bereich, in dem der selbsterregte Oszillator im Gleichklang mit der externen Triebkraft schwingt. Nimmt man weiterhin als dritte Koordinate die Kopplungsstärke ϵ hinzu, zu erkennt man eine Arnoldzunge, deren Grenzen von den Plateaux für die jeweilige Kopplungsstärke definiert werden.

Wir erkennen an der Darstellung der Arnoldzunge in Abb. 1.4, dass für verschwindende Kopplung ϵ keine Synchronisation auftritt. Es gibt kein Plateau, vielmehr nur einen einzigen Punkt, für den die Differenz $\Omega_k - \omega$ verschwindet, nämlich bei einer Verstimmung $\nu = 0$. Die Breite des Synchronisationsplateaus ist hier proportional zur Kopplungsstärke.

1.3 Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Diplomarbeit ist wie folgt strukturiert:

In Kapitel 2 werden zunächst die Eigenschaften des OMO (Opto - Mechanischen Oszillators) im rauschfreien Fall untersucht. Dazu werden analytische Methoden sowie eine numerische Simulation verwendet und die Ergebnisse beider Methoden verglichen. Es werden Regimes identifiziert: Wir finden Parameterbereiche, in denen kein Grenzzyklus auftritt und somit das OMO keinen selbsterregten Oszillator darstellt. Wir identifizieren aber auch Regimes mit einem oder mehreren Grenzzyklen.

In Kapitel 3 werden diese Regimes dann analytisch genauer auf Synchronisationseigenschaften untersucht. Zunächst wird Methodik für die Analyse der Synchronisation eines beliebigen selbsterregten Oszillators durch eine schwache externe Triebkraft (Abschnitt 3.1) dargestellt. Anschließend wird das OMO nach diesen Vorgaben analysiert (Abschnitt 3.2).

Kapitel 4 widmet sich den Rauscheinflüssen. Die theoretischen Hintergründe zur Ableitung von Quanten-Langevin-Gleichungen und für eine Fokker-Planck-Gleichung werden entwickelt (Abschnitt 4.1). Schließlich werden in Abschnitt 4.2 die Rauscheinflüsse auf das OMO unter bestimmten Annahmen abgeschätzt und quantifiziert sowie ihr Einfluss auf die Synchronisationseigenschaften des Systems untersucht.

In der Zusammenfassung in Kapitel 5 werden die Ergebnisse noch einmal gebündelt und anhand einer abschließenden Betrachtung der Resultate ein Überblick über die gewonnenen Erkenntnisse gegeben.

II
Grenzzyklus

2.1 Beschreibung des OMO

Wie bereits in der Einleitung in Abschnitt 1.1 erläutert wurde, kann das Prinzip eines mechanischen Oszillators mit optischem Hohlraum, dessen Länge durch den Lichtdruck einer Pumpmode verändert wird, auf verschiedene Weise realisiert werden.
Die hier genauer betrachteten Realisierungen werden u.a. von den Gruppen um D. Vitali (z.B. in [18]) und K.J. Vahala (z.B. in [6]) untersucht. Bei Vitali wird ein normaler Hohlraumresonator mit zwei Spiegeln betrachtet, wovon einer beweglich ist. Bei Vahala dagegen wird das Licht in einen Toroid aus Quarz eingekoppelt, der so zum Schwingen angeregt wird.

Hier soll nun die mathematische Beschreibung für beide Realisierungen erklärt werden. Zunächst betrachten wir das Vitali-System, und anschließend gehen wir auf die Differenzen zum Vahala-System ein.

Vitali: Das System wird hier zunächst rauschfrei betrachtet, und Dämpfung wird phänomenologisch eingeführt. Wegen des FDT (siehe Einleitung, 1.1) kann hier aus diesem Grund streng genommen nicht von Operatoren gesprochen werden. Wir werden diesen Begriff jedoch zunächst unter diesem Vorbehalt trotzdem verwenden.
Der Hamiltonoperator des Systems (Vakuumanteil vernachlässigt) ist gegeben durch

$$H = \underbrace{\hbar\omega_c a^* a}_{H_{\text{cav}}} + \underbrace{\mathrm{i}\hbar E\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_l t} a^* - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_l t} a\right)}_{H_{\text{pump}}} \tag{2.1}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{m_{\text{eff}}} + m_{\text{eff}}\Omega_0^2 x^2\right)}_{H_{\text{mech}}} \underbrace{- G\, x\, a^* a.}_{H_{\text{ww}}} \tag{2.2}$$

Der Lichtdruck wird nach [7] durch den Wechselwirkungsterm $-G\,x\,a^*a$ beschrieben. Hier wird mit a der dimensionslose Operator der Lichtmode im Hohlraum und mit x und p Position und Impuls des mechanische Oszillators bezeichnet. Ω_0 ist die Frequenz des ungestörten mechanischen Oszillators und ω_c die Resonanzfrequenz des optischen Hohlraums im Ruhezustand.

Mit $\dot{\mathrm{O}} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\mathrm{O}, H]$ u.s.w. sowie $[x, p] = \mathrm{i}\hbar$ und $[a, a^*] = 1$ ergeben sich folgende Bewegungsgleichungen in einem an der Frequenz ω_l rotierenden Be-

zugssystem (also in einem Wechselwirkungsbild in Bezug auf $\hbar\omega_l a^* a$):

$$\dot{x} = \frac{p}{m_{\text{eff}}} \tag{2.3}$$

$$\dot{p} = -m_{\text{eff}}\Omega_0^2 x - \gamma p + G a^* a \tag{2.4}$$

$$\dot{a} = -(\kappa + \mathrm{i}\Delta)\, a + \mathrm{i}Gxa + E \tag{2.5}$$

$$\dot{a}^* = -(\kappa - \mathrm{i}\Delta)\, a^* - \mathrm{i}Gxa^* + E \tag{2.6}$$

mit $\Delta := (\omega_c - \omega_l)$. Die Dämpfungsraten γ und κ sind hier zunächst nur phänomenologisch eingeführt worden. Zusammen mit dem bosonischen Rauschterm a_{in} und einer hermiteschen Langevin-Kraft b_{in} für den Mechanischen Oszillator können sie aber mit dem Heisenberg-Langevin- Formalismus hergeleitet werden (siehe Abschnitt (4.1.1)).

Die Kopplung G und die reelle Amplitude des kohärenten Laserfeldes E sind aus anderen Systemgrößen zusammengesetzte Parameter. Beide tragen die Dimension „Rate“ :

$$G = \frac{\hbar\omega_c}{L_0}$$

$$E = \sqrt{\frac{2\,P\,\kappa}{\hbar\,\omega_l}}$$

Den Ausdruck für G kann man aus den Bewegungsgleichungen herleiten: G muss der Impulsänderung pro Photon, $2\hbar\,k_{ph} = 2\hbar\frac{\omega_c}{c}$, multipliziert mit der Photonen-Rate, $\frac{c}{2L_0}$, also eben $\frac{\hbar\omega_c}{L_0}$ entsprechen. Dabei ist L_0 die Länge des Hohlraums.

Das Amplitudenquadrat des Pumplichtes E^2 ist durch die Eingangsleistung pro Photonenenergie eingängig beschrieben. Der Faktor $\sqrt{2\kappa}$ kommt zunächst auch nur phänomenologisch dazu.

Vahala: Um das Vahala-System zu beschreiben, kann derselbe Formalismus benutzt werden. Jedoch kann es aufgrund der verschiedenen Mechanik des Oszillators sein, dass der Kopplungsparameter G anders definiert werden muss. Die einfache Herleitung mit dem Impulsübertrag eines Photons am beweglichen Spiegel ist so nicht ohne weiteres für den Toroid zu rechtfertigen.
Es ist jedoch anzunehmen, dass der Ausdruck für G dennoch übertragbar ist. Denn der Zahlenwert für G, der sich für Parameterwerte aus dem Vahala-Papern so ergibt, stimmt im Rahmen einer Größenordnung mit der entsprechenden Größe, die direkt in den Vahala-Papern angegeben ist, überein. Insofern kann man davon ausgehen, dass die Herleitung für den Spiegelaufbau aus den Vitali-Papern auch auf einen Toroid wie in den Vahala-Papern übertragbar ist. Außerdem deutet diese Tatsache darauf hin, dass zusätzliche thermische Effekte durch die Bewegung im Material des Toroid, der ja das Licht leitet, wohl keine große Rolle spielen.

In Bezug auf den Dämpfungsterm ist zu bemerken, dass wichtig ist, was genau mit κ gemeint ist. In den Vahala-Papern bezieht sich κ auf den Gütefaktor Q_{tot}, wobei $\frac{1}{Q_{tot}} = \frac{1}{Q_{cavity}} + \frac{1}{Q_{ext}}$ sowohl Verluste im Hohlraum als auch Verluste beim Einkoppeln beschreibt. Das in den Bewegungsgleichungen phänomenologisch eingeführte κ ist nicht notwendigerweise das Gleiche wie das in der Definition des zusammengesetzten Parameters E. Wir machen jedoch die Annahme, dass auch der phänomenologisch eingeführte Dämpfungsterm sowohl Verluste des Hohlraumes als auch Verluste beim Einkoppeln berücksichtigt.

2.1.1 Skalierung der Systemvariablen

Die dimensionslosen [1] Systemvariablen x, p, a und a^* aus den Bewegungsgleichungen [2] (mit den 6 Parametern $\Omega_0, \gamma, \kappa, \Delta, \widetilde{G}, E$)

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\Omega_0^2 x - \gamma \dot{x} + \Omega_0 \widetilde{G} a^* a \\ \dot{a} &= -(\kappa + \mathrm{i}\Delta)\, a + \mathrm{i}\widetilde{G} x a + E \end{aligned} \tag{2.7}$$

können noch umskaliert werden, damit sie typischerweise Werte der Größenordnung eins annehmen. Dazu definieren wir:

$$x \longrightarrow \frac{E}{\kappa}\, x \tag{2.8}$$

$$a \longrightarrow \frac{E}{\kappa}\, a. \tag{2.9}$$

Diese Wahl der Umskalierung ist motiviert durch die stationäre Photonenzahl im Resonator $a_0^2 \approx \left|\frac{E}{\kappa + \mathrm{i}\Delta}\right|^2$. Sie soll in den umskalierten Größen die Referenz sein. Dieselbe Umskalierung wird für x verwendet. Dies liefert später eine Kopplung g, die in beiden Bewegungsgleichungen symmetrisch auftaucht[3]. Die mit der Dimension „Zeit“ oder „Rate“ behafteten Größen werden wie folgt dimensionslos gemacht:

$$\begin{aligned} & t \longrightarrow \frac{t}{\Omega_0} \\ & \gamma \longrightarrow \gamma\, \Omega_0 \qquad \kappa \longrightarrow \kappa\, \Omega_0 \qquad \Delta \longrightarrow \Delta\, \Omega_0 \\ & \widetilde{G} \longrightarrow \widetilde{G}\, \Omega_0 \quad E \longrightarrow E\, \Omega_0 \quad \Omega \longrightarrow \Omega\, \Omega_0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Die dimensionslosen Bewegungsgleichungen lauten mit $g := \frac{\widetilde{G} E}{\kappa \Omega_0}$ nun

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -x - \gamma \dot{x} + g a^* a \\ \dot{a} &= -(\kappa + \mathrm{i}\Delta)\, a + \mathrm{i} g x a + \kappa \end{aligned} \tag{2.11}$$

[1] x und p sind durch die Verwendung von m_{eff} , $\sqrt{\frac{\hbar}{m_{\text{eff}}\, \Omega_0}}$ und Ω_0 als passende Einheiten für Masse, Länge und Rate dimensionslos gemacht worden. Dabei ist m_{eff} die effektive Masse des mechanischen Oszillators. Somit ist die neue Kopplung $\widetilde{G} = \frac{\omega_c}{L_0} \sqrt{\frac{\hbar}{m_{\text{eff}}\, \Omega_0}}$.

[2] Hier wird zur besseren Übersicht auf die Niederschrift der zu $\dot{a}$ konjugierten Gleichung verzichtet. Ebenso werden die beiden Gleichungen erster Ordnung für $\dot{x}$ und $\dot{p}$ auf eine Gleichung zweiter Ordnung für $\ddot{x}$ reduziert.

[3] Außerdem wird sich in der Simulation (Abschnitt 2.3) zeigen, dass auch die Auslenkung so von der Größenordnung eins bis zehn wird.

und entsprechen somit der allgemeinen Form der Gleichungen (1.2) aus Abschnitt 1.1. Hier sind nur noch die 4 Parameter $g, \gamma, \kappa, \Delta$ übrig geblieben.

Bemerkung: Die Form der Gleichungen (2.7) geht mittels dreier einfacher Ersetzungen in die allgemeine Form (1.2) bzw. (2.11) über: $\Omega_0 \longrightarrow 1$, $\widetilde{G} \longrightarrow g$, $E \longrightarrow \kappa$. Alle anderen Größen erhalten ihre neue Bedeutung gemäß den Vorschriften (2.10).

2.2 Der Grenzzyklus

Da wir das Synchronisationsverhalten des Systems beschreiben wollen, müssen wir seine allgemeinen Eigenschaften untersuchen. Ein selbsterregter Oszillator zeigt eine nicht abklingende stabile Oszillation in einem autonomen dissipativen System (siehe [11]). Um ein solches System handelt es sich hier. Es gilt also, diese stabile Oszillation zu finden. Genauer suchen wir den Grenzzyklus im Phasenraum aus x, p und a und die Phase, mit der sich der Zustand des Systems auf diesem Grenzzyklus beschreiben lässt.
Wir setzen ein (unbekanntes) harmonisches Regime für x und p voraus:

$$x(t) = \bar{x} + B\cos(\Omega t + \varphi_0) \tag{2.12}$$

Die Parameter dieses harmonischen Regimes $(\bar{x}, B, \Omega)$ sollen nun ermittelt werden. Die Phase dieses Regimes sei mit $\Phi := \Omega t + \varphi_0$ definiert. Die Umskalierung der Größen $\bar{x}$ und B erfolgt analog zu (2.8).
Zur Ermittlung dieser Parameter wird Selbstkonsistenz gefordert: Es werden zwei verschiedene Ausdrücke für den Strahlungsdruck ermittelt, die dann verglichen werden.

2.2.1 Der Strahlungsdruck

Erstens: Aus (2.3) und (2.4) ermitteln wir für das harmonische Regime mit (2.12) zunächst einen ersten Ausdruck für den Strahlungsdruck a^*a. Durch Einsetzen von (2.12) in (2.3) erhalten wir

$$\dot{x} \;=\; p(t) = -\Omega B \sin(\Omega t + \varphi_0)\,.$$

Dieser Ausdruck wird nach p umgestellt, zeitlich abgeleitet und mit (2.4) gleichgesetzt. Dadruch ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= -x - \gamma p + Ga^*a \\
&= -\left(\bar{x} + B\cos(\Omega t + \varphi_0)\right) - \gamma\left(-\Omega B \sin(\Omega t + \varphi_0)\right) + Ga^*a \\
&= -\Omega^2 B \cos(\Omega t + \varphi_0)\,.
\end{aligned}$$

Durch Umstellung nach a^*a erhalten wir

$$a^*a = \frac{1}{G}\left[\Omega\bar{x} + \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Omega t + \varphi_0)}\left\{\frac{B}{2}\left(1 - \Omega^2\right) + \mathrm{i}\frac{\gamma B}{2}\cdot\Omega\right\} + c.c\right)\right]. \tag{2.13}$$

Zweitens: Wir ermitteln aus Gl.(2.5) einen weiteren Ausdruck für a^*a. Zunächst wird die Lösung $a(t)$ mit $x(t)$ auf dem Grenzzyklus gemäß Gl.(2.12) bestimmt. Mit der Jakobi-Anger Identität,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi},$$

erhalten wir:

$$\begin{aligned} a(t) &= \mathrm{e}^{(-(\kappa+\mathrm{i}\Delta)+\mathrm{i}g\bar{x})t+\frac{\mathrm{i}gB}{\Omega}\sin(\Omega t+\varphi_0)} \\ &\quad \left\{ a_0 + \kappa \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(-\frac{gB}{\Omega}\right) \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi_0}\cdot\left(\mathrm{e}^{t(\kappa+\mathrm{i}\Delta-\mathrm{i}g\bar{x}+\mathrm{i}n\Omega)}-1\right)}{\kappa+\mathrm{i}\Delta-\mathrm{i}g\bar{x}+\mathrm{i}n\Omega} \right\}. \end{aligned}$$

Im stationären Limes $\lim_{t\to\infty} a(t)$ fällt der Term mit dem Anfangswert a_0 weg. Wir erhalten mit $J_n(-z) = (-1)^n J_n(z)$

$$a(t)_{ss} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}gB}{\Omega}\sin(\Omega t+\varphi_0)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\Omega t+\varphi_0)}$$

mit

$$\alpha_n = (-1)^n\, J_n\left(\frac{gB}{\Omega}\right) \frac{\kappa}{\kappa+\mathrm{i}\Delta-\mathrm{i}g\bar{x}+\mathrm{i}n\Omega} \quad .$$

Wir arbeiten nun im Folgenden mit dieser Ginzburg-Landau - artigen Gleichung für die komplexe Größe a. Auf die Ableitung einer Gleichung vom Typ Van-der-Pol für den mechanischen Freiheitsgrad x wurde verzichtet.
Es ergibt sich folgender alternativer Ausdruck für a^*a:

$$a^*a_{ss}(t) = \sum_{n,m} \alpha_n\alpha_m^*\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)(\Omega t+\varphi_0)} \ . \tag{2.14}$$

2.2.2 Selbstkonsistenz: Vergleich

Nun soll (2.14) mit (2.13) verglichen werden. In (2.13) treten nur Oszillationen an der 0. und 1. Harmonischen in $(\Omega t + \varphi_0)$ auf. Daher werden auch in (2.14), wo alle höheren Harmonische auftreten, zunächst nur diese Terme betrachtet. Für vollständige Selbstkonsistenz müssen auch die höheren Harmonischen betrachtet werden. Warum sie dennoch beiseite gelassen werden können, soll im Abschnitt über die höheren Harmonischen weiter unten geklärt werden.
Zur monochromatischen Oszillation an der Frequenz Ω (1. Harmonische) in (2.14) tragen nur bestimmte Terme bei:

$$a^*a_{osz\ \Omega,\ ss}(t) = \sum_l \alpha_l\alpha_{l+1}^*\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Omega t+\varphi_0)} + \sum_l \alpha_l\alpha_{l-1}^*\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Omega t+\varphi_0)}$$

Außerdem gibt es konstante Terme (0. Harmonische), die für $n = m$ auftreten:

$$a^*a_{konst,\ ss} = \sum_l \alpha_l\alpha_l^* \ .$$

In beiden Ausdrücken stehen unendliche Summen. Die Summanden beschreiben wir aufgrund ihrer Struktur als „Seitenbänder“ .

Vergleich an der 0. Harmonischen: Nun zum Vergleich für die konstanten Terme (Vergleich an der Frequenz Null). Der Ausdruck

$$\frac{\bar{x}}{g} \stackrel{!}{=} \sum_l \alpha_l \alpha_l^* \tag{2.15}$$

kann später benutzt werden, um $\bar{x}$ zu indentifizieren.

Bemerkung: Für den obigen Ausdruck gibt es eine einfache physikalische Interpretation: Fordert man, dass die gesamte zeitgemittelte Kraft verschwinden soll,

$$0 \stackrel{!}{=} \langle \ddot{x} \rangle = \langle -x - \gamma \dot{x} + g a^* a \rangle \tag{2.16}$$

so erhält man:

$$g \underbrace{\langle a^* a \rangle}_{=\sum_l |\alpha_l|^2} = \bar{x} + \gamma \underbrace{\langle \dot{x} \rangle}_{=0} .$$

Dies ist identisch mit Gl. (2.15).

Struktur von Gleichung (2.15):

$$\begin{aligned} \bar{x} &= g \sum_l \alpha_l \alpha_l^* \\ &= g\kappa^2 \sum_l \underbrace{J_l^2 \left(\frac{gB}{\Omega} \right) \frac{1}{\kappa^2 + (-g\bar{x} + \Delta + l\Omega)^2}}_{=:k_l} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Die Seitenbänder k_l haben die Struktur einer Lorentz-Kurve in Δ (Cauchy-Kurve für Mathematiker):

$$\frac{\mu}{\mu^2 + (x - x_o)^2}$$

wobei die Höhe dieser Glocke mit $\frac{1}{\mu}$ und die halbe Breite bei halber Höhe mit μ bestimmt werden kann.
Diese Lorentzkurven werden gewichtet mit dem entsprechenden Bessel-Term.

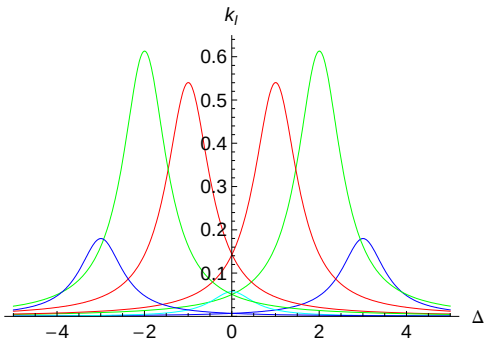

Abbildung 2.1: Hier sind die für die Parameter aus (2.3.1) relevanten Seitenbänder k_l farblich unterschieden als Funktion von Δ dargestellt. k_0 in türkis (geringe Wichtung durch J_0 wegen $\frac{gB}{\Omega} = 2.7$), und k_1, k_2 und k_3 in rot, grün und blau.

Das Verhältnis von relativer Breite der Lorenz-Glocken ($\sim \kappa$) zum Abstand der einzelnen mit l indizierten Kurven, also der freien Spektrallänge der mechanischen Oszillation ($\sim \Omega$) bestimmt, ob die Spitzen sauber getrennt auftreten oder sich überlagern.

Wichtung durch Besselfunktionen: Die Wichtung durch die Besselfunktionen bestimmt, wie viele Seitenbänder relevant sind. Wie stark die Besselfunktionen wichten, also welchen Wert sie annehmen, hängt von ihrer Ordnung und vom Argument ab.

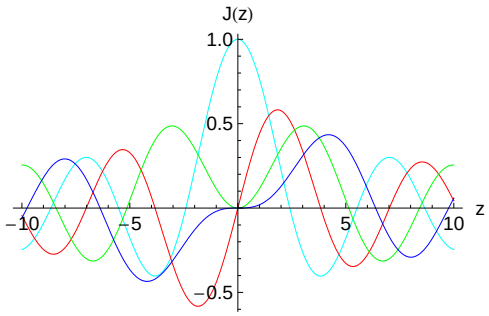

Abbildung 2.2: J_0 in türkis, und J_1, J_2 und J_3 in rot, grün und blau.

Für kleine Argumente der Besselfunktion [4] kann man sofort erkennen, dass hauptsächlich J_0 beiträgt. Es können jedoch auch allgemeine Aussagen gemacht werden:

Relevante Seitenbänder:

$$|J_n(z)|^2 \ll 1 \quad \text{bei} \quad n > z \tag{2.18}$$

Für die Regimes kleiner beziehungsweise großer Argumente gelten folgende Näherungsformeln:

Regime kleiner Argumente:

$$J_n(z) \approx \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^n \quad \text{bei} \quad z \ll \max(1, n) \tag{2.19}$$

Regime großer Argumente:

$$J_m(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4} - m\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{bei} \quad z \gg m$$

Der Parametersatz aus Abschnitt 2.3.1 (Parametersatz A aus Tabelle 2.1) liefert ein Besselargument von $\frac{gB}{\Omega} = 2.69$, so dass nicht mehr als 3 Seitenbänder relevant sind. Dies erkennt man auch gut in Abb. 2.1, wo nur drei Seitenbänder dargestellt sind: Die Wichtung durch die Besselfunktionen nimmt mit steigender Ordnung l ab.

[4] Im Folgenden bezeichnen wir die Größe $\frac{gB}{\Omega}$ als das „Besselargument“ .

Vergleich an der 1. Harmonischen: Wir führen den Vergleich für die oszillierenden Terme durch. Mit $\sum_l \alpha_l \alpha_{l+1}^* = \frac{A}{g}$ und somit $g\, a^* a_{osz\ \Omega,\ ss} = A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Omega t+\varphi_0)} + c.c.$ liefert der Vergleich an Ω (Terme mit $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Omega t+\varphi_0)}$)

$$A = g \sum_l \alpha_l \alpha_{l+1}^* \stackrel{!}{=} \frac{B}{2}\left(1 - \Omega^2 - \mathrm{i}\gamma\Omega\right).$$

In diesem Ausdruck kann man Real- und Imaginärteile separat miteinander vergleichen:
Für den Realteil[5]:

$$\frac{B}{2}\left(1 - \Omega^2\right) \stackrel{!}{=} g\,\mathrm{Re} \sum_l \alpha_l \alpha_{l+1}^* \tag{2.20}$$

Für den Imaginärteil [6]:

$$-\frac{B}{2}\gamma\Omega \stackrel{!}{=} g\,\mathrm{Im} \sum_l \alpha_l \alpha_{l+1}^* \tag{2.21}$$

Aus den beiden Ausdrücken (2.20) und (2.21) können später die beiden anderen Parameter des Grenzzyklus, B und Ω, bestimmt werden.

Bemerkung: Auch hier gibt es eine einfach physikalische Interpretation: Für den **Realteil-Vergleich** muss der gemittelte Ausdruck für die Energie $\langle \dot{x}^2 \rangle = -\langle \ddot{x}\, x \rangle$ (Minuszeichen aus partieller Integration bei Auswertung der Zeitmittelung) der Energie eines harmonischen Oszillators entsprechen.

$$-\langle \ddot{x}\, x \rangle \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}\left(\Omega B\right)^2$$

$$-\langle x^2 \rangle - \gamma \langle \dot{x}\, x \rangle + g \langle a^* a \cdot x \rangle = \frac{1}{2}\left(\Omega B\right)^2$$

$$-\left(\bar{x}^2 + \frac{B^2}{2}\right) + g\left(\bar{x} \sum_l |\widetilde{\alpha}_l|^2 + B\,\mathrm{Re}\,\left(\sum_l \alpha_l \alpha_{l+1}^*\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\Omega B\right)^2$$

Mit (2.16) folgt dann der Ausdruck für den Realteil (2.20).

Für den **Imaginärteil-Vergleich** muss die gemittelte Leistung veschwinden.

$$0 \stackrel{!}{=} \langle \ddot{x}\dot{x} \rangle = \langle -x\dot{x} - \gamma \dot{x}^2 + g a^* a\, \dot{x} \rangle$$

[5] Im Ansatz wie in [10], mit $\Omega_0 = \Omega$ bzw. dimensionslos $\Omega = 1$, verschwindet die linke Seite von (2.20).

[6] Bzw. bei Vergleich an $-\Omega$ ($k = l + 1$):

$$\frac{B}{2}\gamma\Omega = \mathrm{Im}\ \left(A^*\right) = g\,\mathrm{Im} \sum_l \alpha_l^* \alpha_{l+1} = g\,\mathrm{Im} \sum_k \alpha_k \alpha_{k-1}^*.$$

Der Ausdruck

$$\underbrace{g\langle a^* a\,\dot{x}\rangle}_{P_{rad}} = \underbrace{\gamma\langle \dot{x}^2\rangle}_{P_{fric}} + \underbrace{\langle x\dot{x}\rangle}_{0}$$

mit der Reibungsleistung P_{fric}

$$P_{fric} = \gamma\langle B^2\Omega^2 \sin^2(\Omega t + \varphi_0)\rangle = \gamma\frac{B^2\Omega^2}{2}$$

und mit der Strahlungsleistung P_{rad}

$$\begin{aligned} P_{rad} &= -gB\Omega\,\langle a^* a \cdot \sin(\Omega t + \varphi_0)\rangle \\ &= -gB\Omega\,\mathrm{Im}\sum_l \alpha_l \alpha_{l+1}^* \end{aligned}$$

ist zu (2.21) äquivalent.

Hieran ist ein wichtiger Aspekt zu verstehen. Die Strahlungsleistung gleicht im stationären Zustand die Reibungsleistung aus. Dies bedeutet, dass der Imaginärteil von (2.14) als eine der natürlichen Dämpfung γ entsprechende, durch den Lichtdruck im System hervorgerufene, zusätzliche Dämpfung verstanden werden kann. Das Vorzeichen dieser zusätzlichen Dämpfung bestimmt, ob Anregung oder Kühlung durch den Lichtdruck in diesem selbstregulierten System stattfindet.

Struktur von Gleichungen (2.21) und (2.20)
Realteil:

$$\begin{aligned} \frac{B}{2}\left(1-\Omega^2\right) &= g\,\mathrm{Re}\left(\sum_l \alpha_l \alpha_{l+1}^*\right) \\ &= g\kappa^2 \sum_l r_l \end{aligned} \tag{2.22}$$

mit den Seitenbändern

$$r_l := J_l\left(\frac{gB}{\Omega}\right) J_{l+1}\left(\frac{gB}{\Omega}\right) \cdot \mathrm{Re}\left(\frac{(-1)^l}{\kappa + \mathrm{i}\Delta - \mathrm{i}g\bar{x} + \mathrm{i}l\Omega} \cdot \frac{(-1)^{l+1}}{\kappa - \mathrm{i}\Delta + \mathrm{i}g\bar{x} - \mathrm{i}(l+1)\Omega}\right)$$

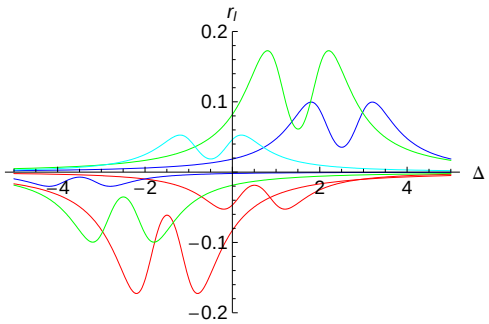

Abbildung 2.3: Die für die Parameter aus (2.3.1) relevanten Seitenbänder r_l als Funktion von Δ.

Imaginärteil:

$$\begin{aligned} -\frac{B\gamma\Omega}{2} &= g\,\mathrm{Im}\left(\sum_l \alpha_l \alpha_{l+1}^*\right) \\ &= g\kappa^2 \sum_l i_l \end{aligned} \tag{2.23}$$

mit den Seitenbändern

$$i_l := J_l\left(\frac{gB}{\Omega}\right) J_{l+1}\left(\frac{gB}{\Omega}\right) \cdot \mathrm{Im}\left(\frac{(-1)^l}{\kappa + \mathrm{i}\Delta - \mathrm{i}g\bar{x} + \mathrm{i}l\Omega} \cdot \frac{(-1)^{l+1}}{\kappa - \mathrm{i}\Delta + \mathrm{i}g\bar{x} - \mathrm{i}(l+1)\Omega}\right)$$

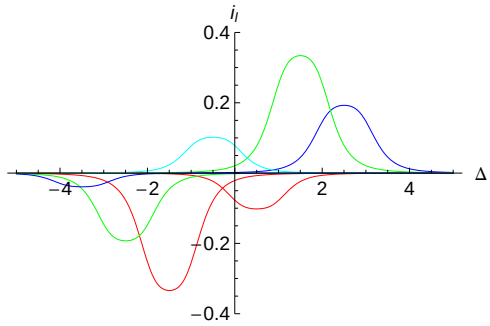

Abbildung 2.4: Die für die Parameter aus (2.3.1) relevanten Seitenbänder i_l als Funktion von B.

Höhere Harmonische in a^*a: In (2.14) treten auch höhere Harmonische auf. Aber nur die erste Harmonische in a^*a hat einen Einfluss auf die Dynamik von x:

$$\ddot{x} = -x - \gamma\dot{x} + ga^*a \tag{2.24}$$

Die Gleichung beschreibt einen klassischen gedämpft-getriebenen Oszillator. Der Term ga^*a übernimmt hier die Rolle der Triebkraft. Bei solchen Systemen stellt sich im stationären Zustand eine Schwingung an der Frequenz der Triebkraft ein, wobei die Amplitude bei einer Frequenz der Triebkraft, die der Resonanzfrequenz (hier $\Omega_r = \sqrt{1^2 - \gamma^2} \approx 1$) entspricht, maximal wird.
Nun stellt sich gerade dieser Grenzzyklus mit $\Omega \approx 1$ ein, eben weil bei diesem Wert für Ω die Rückkopplung durch das Licht zur Verstärkung führt. Somit ist zu erwarten, dass diese erste Harmonische es ist, die als Resonanzfrequenz Einfluss auf die Dynamik von x hat, und somit x an dieser Frequenz Ω bzw. 1 schwingen wird.
Das würde bedeuten, dass im obigen Vergleich nach Konstruktion die höheren Harmonischen nicht berücksichtigt werden müssen. Dies kann auch noch analytisch überprüft werden, indem folgende Überlegung gemacht wird: Die Lösung von (2.24) mit

$$ga^*a = \sum_n A_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\Omega t + \varphi_0)} + c.c.$$

wobei

$$A_n = g \sum_l \alpha_l \alpha_{l+n}^*$$

enthält eine Transiente x_t und eine stationäre Lösung x_s. Die stationäre Lösung x_s lässt sich mit einem Exponentialansatz

$$x_s(t) = \sum_n D_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\Omega t + \varphi_0)} + c.c.$$

ermitteln, wobei sich D_n zu

$$D_n = \frac{A_n}{1 - n^2\Omega - \mathrm{i}n\Omega\gamma} \tag{2.25}$$

ergibt. Somit lautet die stationäre Lösung:

$$x_s(t) = \sum_n \frac{A_n}{1 - n^2\Omega - \mathrm{i}n\Omega\gamma} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\Omega t + \varphi_0)} + c.c.$$

Die höheren Harmonischen spielen also keine Rolle, sofern für $n \geq 2$ gilt:

$$\left| \frac{g \sum_l \alpha_l \alpha_{l+n}^*}{1 - n^2\Omega - \mathrm{i}n\Omega\gamma} \right| \ll \left| \frac{g \sum_l \alpha_l \alpha_{l+1}^*}{1 - \Omega - \mathrm{i}\Omega\gamma} \right| \tag{2.26}$$

In Abschnitt (2.4.3) wird dieser Zusammenhang überprüft.
Dabei ergibt sich $\bar{x}$ zu $|g \sum_l \alpha_l \alpha_l^*|$ und B zu $\left| \frac{g \sum_l \alpha_l \alpha_{l+1}^*}{1 - \Omega - \mathrm{i}\Omega\gamma} \right|$.

2.2.3 Regimes im Phasenraum der Parameter $\frac{\gamma}{g^2}$ und Δ

In diesem Abschnitt werden wir, um dem Leser einen Überblick zu verschaffen, einige Ergebnisse aus den beiden folgenden Abschnitten vorwegnehmen. Durch die Simulation des Systemverhaltens in 2.3 und die analytische und graphische Auswertung in der Näherung relevanter Seitenbänder in 2.4 werden wir ein Verständnis für verschiedene Punkte erlangen:

- Wie beeinflussen die einzelnen Systemparameter die Dynamik?
- Wodurch unterscheiden sich mögliche Grenzzyklen: Frequenz Ω, konstante Auslenkung $\bar{x}$ oder Amplitude B ?
- Wie hängt die Anzahl der Grenzzyklen von den Parametern ab, und welche Parameter spielen dabei die entscheidende Rolle?
- Wie verhält sich das System an ausgewählten charakteristischen Parametersätzen?

Die Parameter bestimmen die Dynamik des Systems: Es gibt Regimes ohne Grenzzyklus oder mit einem oder vielen Grenzzyklen. Innerhalb dieser Regimes verändern sich die Parameter der Grenzzyklen, Ω, $\bar{x}$ und B mit den Systemparametern γ, κ, g und Δ. Wir wählen einige charakteristische Parametersätze

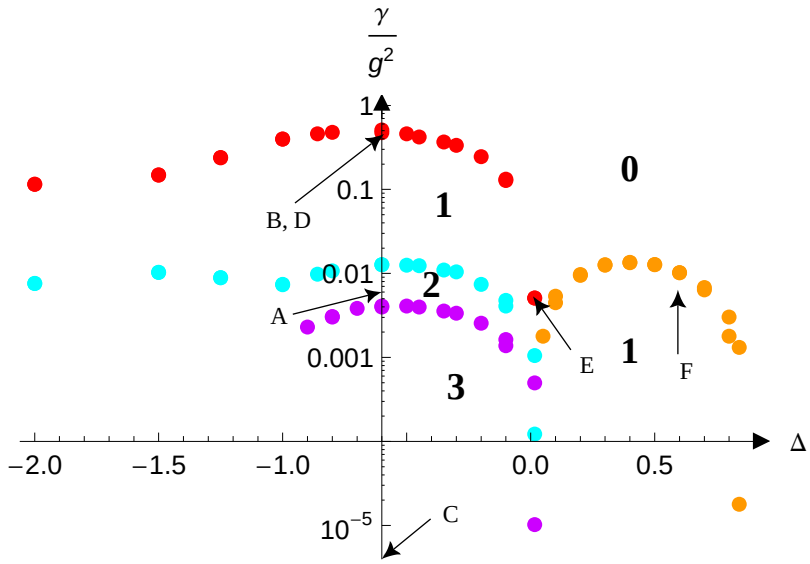

Abbildung 2.5: Phasenraum der Parameter γ/g^2 und Δ. Die farbigen Punkte markieren Übergänge zwischen Regimes mit unterschiedliche vielen Grenzzyklen (Regime mit mehr als 3 Gz. sind nicht gekennzeichnet). Einige charakteristische Parametersätze sind markiert.

für unsere Untersuchungen aus. Sie sind durch die Buchstaben A bis F in Abb. 2.5 markiert, und in einer Übersicht in Tab. 2.1 aus Abschnitt 2.3 kurz charakterisiert.

Eine der Erkenntnisse der nächsten Abschnitte ist, dass die interessante Größe des Grenzzyklus seine Amplitude B ist. Auch die konstante Auslenkung $\bar{x}$ ist variabel, aber die Amplitude ist das augenscheinlichste Kriterium eines solchen Grenzzyklus, und B bestimmt außerdem ganz entscheidend das Besselargument, welches für die Analytik von großer Bedeutung ist und das Spektrum des Lichtes im Hohlraum bestimmt. Die Frequenz Ω aber, an der das System im Grenzzyklus schwingt, weicht nur um wenige zehntel Prozent von der natürlichen Frequenz des Oszillators ab. Dies rechtfertigt auch die in [10] getroffene Annahme, die genau davon ausgeht.

In Abb. 2.5 ist nun die Antwort auf die Frage enthalten, wie die Anzahl der Grenzzyklen von den Parametern bestimmt wird. Es handelt sich um eine Phasendarstellung im Raum der Parameter $\frac{\gamma}{g^2}$ und Δ. Diese Darstellung wurde gewählt, weil bei fester Verstimmung Δ allein das Verhältnis aus mechanischer Dämpfung γ und Kopplungsquadrat g^2 die Anzahl der möglichen Grenzzyklen bestimmt [7].

[7] Dies ist eine gut begründete Vermutung: Die Feststellung, dass die Phasenraumdarstellungen für $\frac{\gamma}{g_A^2}$ und für $\frac{\gamma_A}{g^2}$ (Der Index A bezieht sich auf einen festen Parameterwert entsprechend Abschnitt 2.3.1) über Δ deckungsgleich sind, bestätigt diese Tatsache streng genommen nur für einen Schnitt im Phasenraum aus g, γ und Δ.

Es ist gut verständlich, dass es einen Schwellenwert γ_s gibt (für festes g, z.B. Parametersatz D), oberhalb dessen kein Grenzzyklus mehr existieren kann. Der Oszillator verliert die Eigenschaft der Selbsterregung, wenn die mechanische Dämpfung diesen Wert überschreitet. Ebenso muss ein Schwellenwert g_s (bei festem γ, z.B. Parametersatz B) der Kopplung zwischen mechanischen und optischen Komponenten des OMO überschritten werden. Die Anzahl der Grenzzyklen nimmt mit der Entfernung von $\frac{\gamma}{g^2}$ von diesen Schwellen schnell zu (z.B. Parametersatz C). In Abb. 2.5 sind nur die Phasenübergänge zu bis zu 3 Grenzzyklen dargestellt.

Gut zu erkennen ist ein Schwellenwert Δ_s, der, wie sich herausstellen wird, bei ≈ 0.016 liegt. Oberhalb dieses Wertes gibt es zwar nochmals ein Regime mit einem Grenzzyklus (ocker in Abb. 2.5), dieser wird aber nur für große Startwerte erreicht. Ansonsten herrscht im Bereich positiver Verstimmung Kühlung statt Anregung. Die Tatsache, dass nun bei entsprechenden Startwerten doch ein Grenzzyklus erreicht wird, soll im Folgenden als „Anomalie“ bezeichnet werden.
Entscheidend, ob diese Schwelle überschritten werden kann, ohne dass ein Regime ohne Grenzzyklus passiert werden muss, ist wieder das Verhältnis $\frac{\gamma}{g^2}$. So kann beispielsweise, wenn vom Parametersatz A ausgehend die Verstimmung adiabatisch erhöht wird, das ocker Regime nicht so erreicht werden, dass der mögliche Grenzzyklus auch tatsächlich eintritt. Vielmehr tritt zusätzliche positive Dämpfung und somit Kühlung auf. Das liegt daran, dass die einmal bei Passieren der Schwelle zusammengebrochene Schwingung nicht wieder angeregt wird, da der notwendige große Startwert nicht gegeben ist.

Bevor nun die analytische Behandlung begonnen wird, soll durch Simulation des Systemverhaltens zunächst ein Verständnis dafür gewonnen werden, wie die verschiedenen Parameter (g, γ, κ und Δ) das Systemverhalten beeinflussen.

2.3 Numerische Simulation des Systemverhaltens

Zur Simulation des Systemverhaltens werden die dimensionslosen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= p(t) \\
\dot{p}(t) &= -x - \gamma\, p(t) + g\,|a(t)|^2 \\
\dot{a}(t) &= -\left(\kappa + \mathrm{i}\Delta\right) a(t) + \mathrm{i}\; gx\; a(t) + \kappa
\end{aligned}$$

mit dem Programm Mathematica [8] numerisch iterativ [9] gelöst und daraus die Dynamik der Systemvariablen x, p und a sowie $a^\dagger$ abgelesen [10] . Ein wichtiges Ziel ist dabei, die Variablen des Grenzzyklus $\bar{x}$, B und Ω zu identifizieren [11].

2.3.1 Parameter aus dem Vahala-Paper (Parametersatz A)

Um verschiedene Regimes zu identifizieren, werden die dimensionslosen Parameter g, γ, κ und Δ variiert. Dazu wird als willkürliche Referenz der Parametersatz aus einem Paper von Vahala et al. [6] verwendet. Dieser Parametersatz A soll hier kurz vorgestellt werden. Eine Übersicht über die hier untersuchten sieben unterschiedenen Parametersätze findet sich in Tabelle (2.1). Natürlich könnte man noch etliche weitere Parametersätze nennen. Hier aber treffen wir eine Auswahl, die möglichst verschiedene Charakteristika der Systemdynamik widerspiegelt.

[8] Wolfram Research, Mathematica 6.0 . Dieses Programm wird außerdem zur Erstellung aller weiteren Plots in dieser Diplomarbeit verwendet.

[9] Die Startwerte sind, sofern nicht anders angegeben: $x(0) = 1$, $p(0) = 0$ und $a(0) = 1$.

[10] Die in der Simulation ermittelte Dynamik von a^* wird als die der Systemvariable $a^\dagger$ interpretiert.

[11] Die konstante Auslenkung $\bar{x}$ und die Amplitude B werden durch Mittelwertbildung (in Bezug auf die Maximalwerte für x) und der Bestimmung der maximalen Abweichung von diesem Mittelwert bestimmt. Die Frequenz Ω wird durch Entwicklung folgendes Ausdruckes für die Phase nach $\Omega \approx \Omega_0$ gefunden (hier mit dimensionsbehafteten Größen):

$$\Phi = \arctan\left(\frac{\Omega p}{-\Omega_0 x - \gamma p + G a^\dagger a}\right) \approx \arctan\left(\frac{\dot{x}}{\dot{p}}\right)$$

Systemparameter:

$$\begin{aligned}
\Omega_0 &= 5 \cdot 10^7\ \mathrm{s}^{-1} = 1\ \Omega_0 \\
\gamma &= 0.5 \cdot 10^4\ \mathrm{s}^{-1} = 10^{-4}\ \Omega_0 \\
\kappa &= 0.3 \cdot 10^8\ \mathrm{s}^{-1} = 0.6\ \Omega_0 \\
\Delta &= \omega_c - \omega_l = -\kappa \\
\omega_c &= 2.5 \cdot 10^{15}\ \mathrm{s}^{-1} \\
\omega_l &= \omega_c - \Delta = 2.49 \cdot 10^{15}\ \mathrm{s}^{-1} \\
m_{\mathrm{eff}} &= 2.3 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{kg} \\
L_0 &= 2\pi R_0 = 10^{-3}\ \mathrm{m} \\
P &= 3.75 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{W}
\end{aligned}$$

zusammengesetzte Parameter:

$$\begin{aligned}
\widetilde{G} &= \frac{\omega_c}{L_0}\sqrt{\frac{\hbar}{m_{\mathrm{eff}}\,\Omega_0}} = 7 \cdot 10^2\ \mathrm{s}^{-1} = 1.4 \cdot 10^{-5}\ \Omega_0 \\
E &= \sqrt{\frac{2\,P\,\kappa}{\hbar\,\omega_l}} = 3 \cdot 10^{11}\ \mathrm{s}^{-1} = 6 \cdot 10^3\ \Omega_0 \\
g &= \frac{\widetilde{G}E}{\kappa\Omega_0} = 0.14
\end{aligned}$$

Dieser Parametersatz lässt bereits qualitative Rückschlüsse auf die Dynamik zu:

- Die mechanische Dämpfung ist bezogen auf die optische Dämpfung des Hohlraums schwach: $\frac{\gamma}{\kappa} \approx 1.67 \cdot 10^{-4} \ll 1$.

- Die stationäre Wert a_s von $a(t)$ innerhalb des Hohlraums ist mit $\frac{E}{\kappa} \approx 10^4 \gg 1$ hoch. Somit ist auch die stationäre Photonenzahl hoch.

- Die typischen Werte für Auslenkung und Impuls sind mit $x, p \approx 3.6 \cdot 10^4 \gg 1$ (Quelle: Simulation) groß. Somit ist der mechanische Oszillator im klassischen Regime.

- Die Rückstellkraft des mechanischen Oszillators ist groß im Vergleich mit dem Lichtdruck: $\frac{\Omega x}{G a^\dagger a} \approx 26$.

Von all diesen Parametern, die aus [6] extrahiert wurden um sie als Referenzparametersatz zu benutzen, sind für unsere Analyse nur die folgenden vier dimensionslosen relevant:

$$\kappa_A = 0.6 \qquad \Delta_A = -\kappa_A \qquad \gamma_A = 10^{-4} \qquad g_A = 0.14 \tag{2.27}$$

Parametersatz Nr.	Parameter	$\frac{\gamma}{g^2}$	Regime: Anzahl an Grenzzykl.	Systemverhalten	$\bar{x}$, B, Ω des ersten Grenzzykl.	$\frac{gB}{\Omega}$	Analysemethode
A	$g_A = 0.14$ $\Delta_A = -0.6$ $\gamma_A = 10^{-4}$	$7.14 \cdot 10^{-4}$	2	Grenzzyklus: x und p harmonisch $a^\dagger a$ nicht harmonisch	$\bar{x} = 0.027$ $B = 19.3$ $\Omega = 1.0064$	2.69	3 relevante Seitenbänder
B	kleines g $g = 0.015$	0.47	Schwelle: $1 \to 0$	Schwellenverhalten bei $g_s \approx 0.0145$	$\bar{x} = 0.007$ $B = 29.4$ $\Omega = 0.999$	0.44	Näherung kl. $\frac{gB}{\Omega}$ oder rel. Seitenbänder: 1
C	großes g $g = 4.67$	$4.6 \cdot 10^{-6}$	sehr viele	Grenzzyklus: x und p harmonisch $a^\dagger a$ stark nichtharmon.	$\bar{x} = 0.12$ $B = 4.95$ $\Omega = 1.008$	22.9	Näherung großer $\frac{gB}{\Omega}$
D	großes γ $\gamma = 9 \cdot 10^{-3}$	0.46	Schwelle: $1 \to 0$	Schwellenverhalten bei $\gamma_s \approx 9.3 \cdot 10^{-3}$	$\bar{x} = 0.068$ $B = 2.44$ $\Omega = 0.999$	0.34	Näherung kl. $\frac{gB}{\Omega}$ oder rel. Seitenbänder: 1
E	Δ bei 0 $\Delta = 0.0125$	$7.14 \cdot 10^{-4}$	Schwelle: $1 \to 0$	Schwellenverhalten bei $\Delta_s \approx 0.016$	$\bar{x} = 0.12$ $B = 4.3$ $\Omega = 0.999$	0.61	Näherung kl. $\frac{gB}{\Omega}$ oder rel. Seitenbänder: 1
F	Δ $> \Delta_s$ $\Delta = \kappa$	$7.14 \cdot 10^{-4}$	1	großer Startwert $x(0) > 21.5$ nötig	$\bar{x} = 0.39$ $B = 25.5$ $\Omega = 0.999$	3.575	4 relevante Seitenbänder

Tabelle 2.1: Eine Übersichtstabelle. Nähere Erläuterungen zu den einzelnen Parametersätzen finden sich im Text.

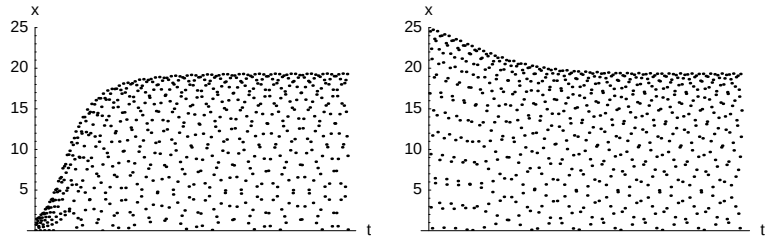

Abbildung 2.6: Stroboskopische Darstellung der Auslenkung x (numerische Simulation, Links Startwert x(0)=1, Rechts x(0)=25, Parametersatz A). Parameter des erreichten Grenzzyklus: $\bar{x} = 0.027$, $B = 19.3$, $\Omega = 1.0064$

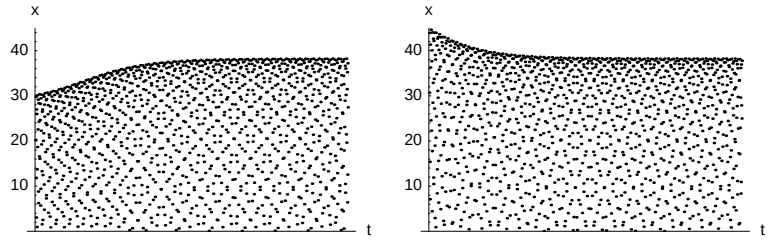

Abbildung 2.7: Stroboskopische Darstellung der Auslenkung x (numerische Simulation, Links Startwert x(0)=30, Rechts x(0)=45, Parametersatz A). Ein weiterer Grenzzyklus mit $\bar{x} = 0.0195$, $B = 38.2$ und $\Omega = 1.00026$.

2.3.2 Dynamik für verschiedene Parametersätze

Parametersatz A: Grenzzyklus bei Vahala-Parametern Die Amplitude der mechanischen Oszillation x strebt vom jeweiligen Anfangswert aus auf oder ab und bleibt dann nach einer bestimmten Anzahl von Rechenschritten konstant. Das mechanische System wird zur Oszillation angeregt und strebt zu einen stabilen Zustand hin, den wir mit dem Grenzzklus identifizieren. Dieser Grenzzyklus markiert also einen stabilen Punkt im Phasenraum der Systemvariablen. Für Parametersatz A gibt es zwei Grenzzyklen. Welcher der beiden Grenzzyklen erreicht wird, hängt von den Startwerten ab (siehe Abb. 2.6 und 2.7).

Neben diesen beiden stabilen Punkten im Phasenraum, den Grenzzyklen, kann noch ein instabiler Punkt identifiziert werden: Bei einem Startwert von $x \approx 28.49$ verweilt das System einige Zeit bei diesem Wert für die Amplitude B, bevor es dann doch abweicht, und sich zu einem der Grenzzyklen entwickelt.

Der erste Grenzzyklus mit $B = 19.3$ wird nun untersucht. Die Bewegung des mechanischen Oszillators zeigt ein harmonisches Verhalten. Demgegenüber ist die Dynamik der Größe $a^\dagger a$ ($\propto$ Lichtdruck) nicht harmonisch. Sie zeigt periodisch auftretende abklingende Oszillationen.

Die Dynamik des mechanischen Teils des Systems steht in engem Zusammen-

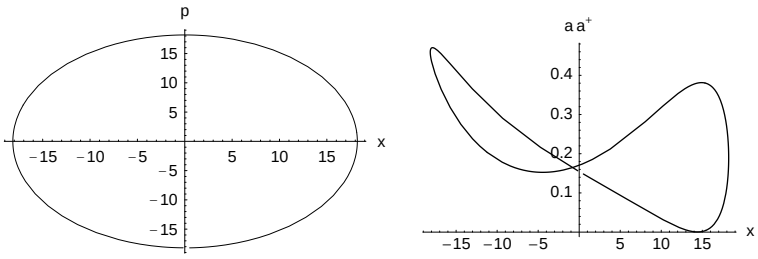

Abbildung 2.8: Phasenraumdarstellungen der Systemvariablen: Lissajousfiguren

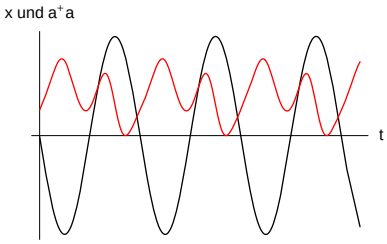

Abbildung 2.9: Zeitliche Entwicklung von Auslenkung x und der Größe $a^\dagger a$ in rot ($\propto$ Lichtdruck) im qualitativen Vergleich

hang zur Dynamik des optischen Teils. Um dies zu verdeutlichen, führen wir eine Fourieranalyse der Zeitreihen für $x(t)$ und $a^\dagger a(t)$ (siehe Abb. 2.9) durch. In Abb. 2.10 ist zu erkennen, dass in der Dynamik des Lichtdrucks im Hohlraum nicht nur die Grundfrequenz Ω des mechanischen Oszillators auftritt. Vielmehr gibt es höhere Harmonische. Diese haben jedoch keine Rückwirkung auf das harmonische Verhalten des mechanischen Oszillators. Dieses Phänomen wurde in Abschnitt 2.2.2 bereits theoretisch untersucht.
Die Parameter des ersten Grenzzyklus (Abb. 2.6) ergeben sich in dieser Simulation zu

$$\bar{x} = 0.027\ , \quad B = 19.3\ , \quad \Omega = 1.0064\ .$$

Damit beträgt der Wert für das Besselargument $\frac{gB}{\Omega} = 2.69$. Drei Seitenbänder sollten also genügen, um das System ausreichend zu beschreiben.

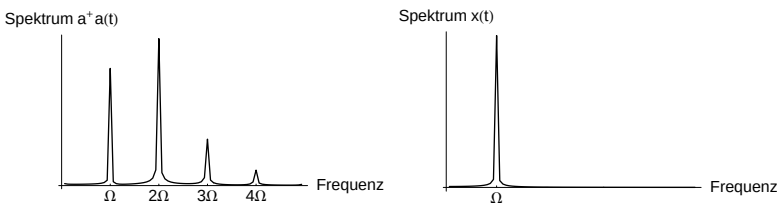

Abbildung 2.10: Fourieranalyse: Erster Grenzzyklus bei Vahala-Parametern

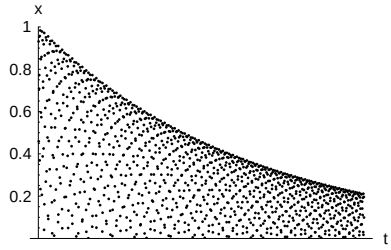

Abbildung 2.11: Stroboskopische Darstellung der Auslenkung x (numerische Simulation, Parametersatz B), hier $g \ll g_s$ bei $g = 0.0047$

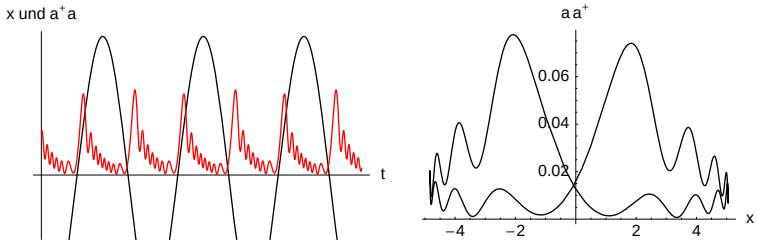

Abbildung 2.12: Parametersatz C: Links Zeitliche Entwicklung von Auslenkung x und der Größe $a^\dagger a$ in rot ($\propto$ Lichtdruck) und rechts Lissajousfigur bei $g = 4.67$ im Grenzzyklus

Parametersatz B: geringe Inputleistung Einige interessante Eigenschaften des Systems zeigen sich, wenn g variiert[12].
Es gibt einen Schwellenwert $g_s \approx 0.0145$, unterhalb dessen jede anfängliche Oszillation abklingt. Auch der Punkt im Phasenraum bei verschwindender Amplitude kann also ein stabiler Punkt sein. Als Grenzzyklus soll er hier jedoch nicht bezeichnet werden. Oberhalb dieser Schwelle wird ein Grenzzyklus erreicht, in Schwellennähe braucht das System aber sehr lange dorthin.

Parametersatz C: große Inputleistung Oberhalb von g_s gibt es Grenzzyklen und somit stabile Oszillationen an einer Amplitude $B > 0$. Je größer P wird, desto schneller kann sich das System in einen Grenzzyklus entwickeln. Ein weiteres Merkmal einer großen Inputleistung ist das nichtlineare Verhalten von $a^\dagger a$ auf dem Grenzzyklus, das immer ausgeprägter wird (Abb 2.12).
Wir beobachten, dass das Systemverhalten (insbesondere die Amplitude B, also welcher Grenzzyklus sich einstellt) stark von den Startwerten in der Simulation abhängt. Beachte hierzu auch Abschnitt 2.4. Wie aus Tabelle (2.1) ersichtlich ist, ergeben sich für diesen Parametersatz solche Werte für $\frac{gB}{\Omega}$, die eine Näherung großer Besselargumente rechtfertigen.
Wird zu der hohen Inputleistung noch ein großer Startwert verwendet, so wird ein Grenzzyklus mit deutlich größerer Amplitude erreicht (bei $g = 4.67$ zum Beispiel $B = 44.2$ und somit $\frac{gB}{\Omega} = 220$). Die Grenzzyklen liegen dann sehr

[12] Dies kann als Variation der Inputleistung P und somit der Größe E interpretiert werden.

dicht beieinander. Es gibt Grenzzyklen bei noch sehr viel größeren Amplituden als in diesem Beispielregime. Offensichtlich ist ein solcher Parametersatz für eine Analyse in der Näherung großer Besselargumente geeignet.

Variation von κ: Wird die Dämpfung des Lichtes κ vergrößert, so braucht das System einfach länger, um in den Grenzzyklus zu gelangen. Wird κ verkleinert, so kommt das System rascher in einen Grenzzyklus. Die Variation dieses Parameters liefert kein neues interessantes Regime.

Parametersatz D: größere mechanische Dämpfung γ Mit der mechanischen Dämpfung γ liegt ein Parameter vor, mit dem man (zumindest in theoretischen Betrachtungen) das System so modifizieren kann, dass ein Regime mit kleinem Besselargument $\frac{gB}{\Omega}$ erreicht wird.
Wird die bereits im Referenz-Parametersatz A sehr kleine Dämpfung γ noch weiter verringert, verändert sich das Systemverhalten kaum.
Bei einer um ein bis zwei Größenordnungen erhöhten Dämpfung aber kann ein Grenzzyklus mit deutlich verkleinerter Amplitude erreicht werden. Auch das Besselargument nimmt dann kleine Werte an. Zum Beispiel liefert das System bei $\gamma = 9 \cdot 10^{-3}$ einen Grenzzyklus mit $B = 2,44$ und $\frac{gB}{\Omega} = 0,34$.
Es gibt auch hier einen Schwellenwert für die Dämpfung, der bei $\gamma_s \approx 9.3 \cdot 10^{-3}$ liegt. Oberhalb dieses Wertes klingt eine anfängliche Oszillation ab.

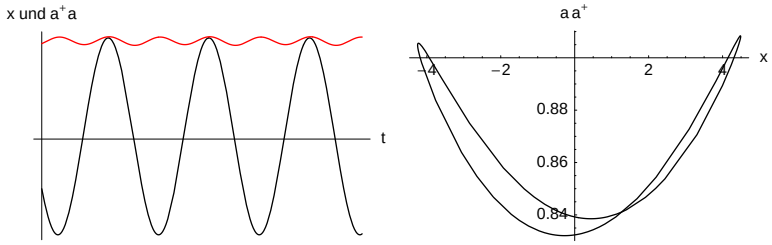

Abbildung 2.13: Parametersatz E: Dynamik von Auslenkung x und der Größe $a^\dagger a$ ($\propto$ Lichtdruck) in Phasenraumdarstellung bei $\Delta = 0.0125$ im Grenzzyklus.

Parametersatz E: Variation der Verstimmung Δ Eine weitere „Schraube“ , die auch experimentell besser zugänglich ist als die mechanisches Dämpfung γ, ist die Verstimmung. Wird Δ von seinem negativen Wert $\Delta = -\kappa$ noch weiter verkleinert, so braucht das System lediglich länger bis zum Erreichen eines Grenzzyklus. Wird Δ jedoch vergrößert, so verkleinern sich die Amplitude B und ebenso das Besselargument $\frac{gB}{\Omega}$. Der Lichtdruck zeigt hier nur schwach nichtlineares Verhalten (siehe Abb. 2.13). Auch hier braucht das System allerdings sehr lang, um den Grenzzyklus zu erreichen. Eine Schwelle liegt bei einem kleinen positiven [13] Wert von $\Delta_s \approx 0.016$. Darüber hinaus klingt jede anfängliche Oszillation für kleine Startwerte ab.

[13] Zu der Frage, warum auch bei positiver Verstimmung Anregung stattfindet, siehe (2.4.2).

Parametersatz F: große Startwerte bei einer Verstimmung $\Delta > \Delta_s$
Wird bei positiver Verstimmung, die oberhalb der Schwelle Δ_s liegt, ein großer Startwert gewählt, kann ein Grenzzyklus erreicht werden. Da Parametersatz F eigentlich im Regime der Kühlung liegt, bezeichnen wir dieses Phänomen als „Anomalie“ . Groß bedeutet dabei für den Startwert, dass er den Wert eines instabilen Punktes bei $x(0) \approx 21.5$ überschreiten muss. Ist der Startwert kleiner, so klingt die Oszillation schnell ab.

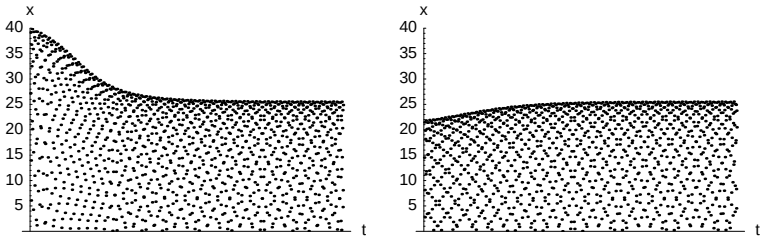

Abbildung 2.14: Parametersatz F: Links beim Startwert $x(0) = 40$ und rechts mit $x(0) = 22$ und bei $\Delta = 0.6$ ergibt sich $B = 25.5$ und $\bar{x} = 0.39$

Analysemethoden: Hier wurden einige Parametersätze identifiziert, für die sich bestimmte Analysemethoden besonders eignen. Eine Auflistung findet sich in Tabelle 2.1.
Ein Parametersatz, für den sich in der Analyse eine Näherung großer Besselargumente deutlich anböte, wurde zwar mit Parametersatz C (besonders für große Startwerte der Auslenkung) gefunden. In der nun folgenden Analyse wurden aber nur Parameterbereiche berücksichtigt, die ein Besselargument von der Größenordnung eins bis zehn liefern. Unter dieser Vorraussetzung kann immer gut die Methode der relevanten Seitenbänder benutzt werden. Die Näherung kleiner Besselargumente ist nur für einen sehr eingeschränkten Parameterbereich gültig.

2.4 Auswertung: relevante Seitenbänder

Die in Tabelle 2.1 identifizierten Parameterbereiche sollen nun analytisch untersucht werden. Dabei beschränken wir uns in diesem Abschnitt auf die Analysemethode der relevanten Seitenbänder. Das bedeutet, dass in der Auswertung der Vergleichs-Gleichungen (2.17), (2.22) und (2.23) die Summen jeweils nur soweit laufen, wie es das Besselargument gemäß dem Zusammenhang (2.18) vorschreibt.

2.4.1 Analytische Auswertung

Hier sollen die Gleichungen für die 0. Harmonische, Gl.(2.17), sowie für den Realteil und den Imaginärteil der 1. Harmonischen, Gl.(2.22) und Gl.(2.23), numerisch iterativ gemeinsam nach den Parametern des Grenzzyklus $\bar{x}$, B und Ω gelöst werden. Iterativ deshalb, weil die Systemparameter g, γ und Δ schrittweise variiert werden. So kann man Kurven erzeugen, die die adiabatische Veränderung eines Grenzzyklus bei Veränderung der Systemeigenschaften illustrieren. Die Parameter g, γ und Δ wählen wir aus, weil das System bei deren Veränderung Schwellenverhalten zeigt (siehe Tab. 2.1). Soweit nicht anders vermerkt sind alle konstant gehaltenen Parameter die aus Parametersatz A.
Außerdem vergleichen wir diese analytischen Resultate mit denen der numerischen Simulation aus Abschnitt 2.3. Die Stärke dieser Analyse wird die sehr gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Simulation sein.

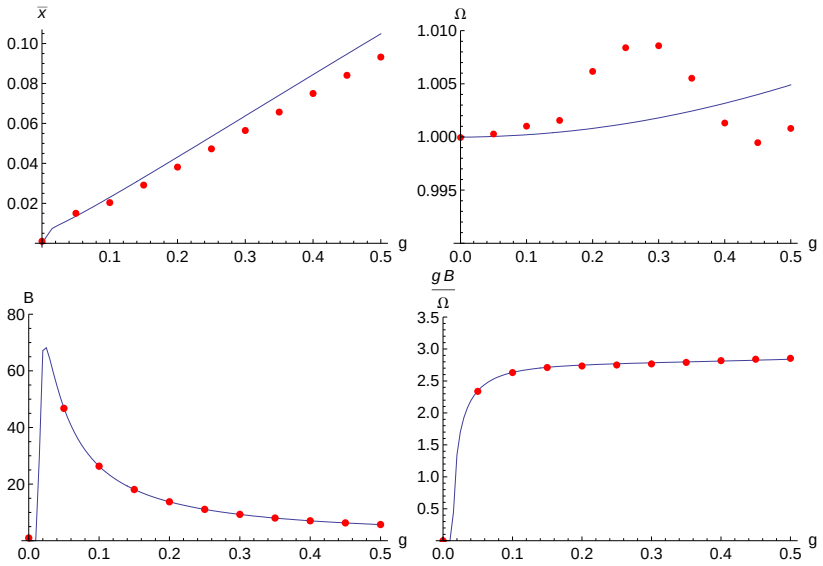

Abbildung 2.15: Parameter des Grenzzyklus als Funktion von g (sonst Parametersatz A). Die roten Punkte markieren die Ergebnisse der numerischen Simulation.

Parameter g: Sehr schön zu erkennen ist an der in Abb. 2.15 dargestellten numerischen Analyse im Bereich kleiner Werte für g, dass erst mit Überschrei-

ten einer Schwelle g_s ein Grenzzyklus auftritt. Wir erhalten besonders für die Amplitude B eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der numerischen Simulation aus Abschnitt 2.3.
Der Abfall von B mit steigendem g ergibt sich dadurch, dass - wegen der hier sehr klein gewählten Schrittgröße - quasi eine adiabatische Anpassung an die Veränderung von g erfolgt; obwohl weiterhin auch Grenzzyklen mit größerer Amplitude B existieren, erfasst die iterative Lösungsmethode diese nicht, sondern folgt der Lösung, die zu Beginn der Iteration durch den Startwert festgelegt wurde. Je größer g wird, desto sensibler reagiert die Numerik auf die Schrittgröße der Iteration. Dies kann direkt in Verbindung gebracht werden mit der Erfahrung aus der Simulation, dass bei großen Werten von g die Amplitude des erreichten Grenzzyklus sehr sensibel von den Anfangsbedingungen abhängt. Aus der graphischen Auswertung in Abschnitt 2.4.2 werden wir lernen, dass es tatsächlich immer mehr Grenzzyklen gibt je größer g wird, und dass deren Amplituden B näher zusammenrücken. Daraus kann geschlossen werden, dass - abhängig von der Stärke des mechanischen Rauschens, das hier noch nicht berücksichtigt wurde - ab einer bestimmen Kopplungsstärke kein Grenzzyklus mehr existieren kann, da das System bedingt durch das Rauschen unvorhersagbar von einem Grenzzyklus zu einem benachbarten springen kann. [14].

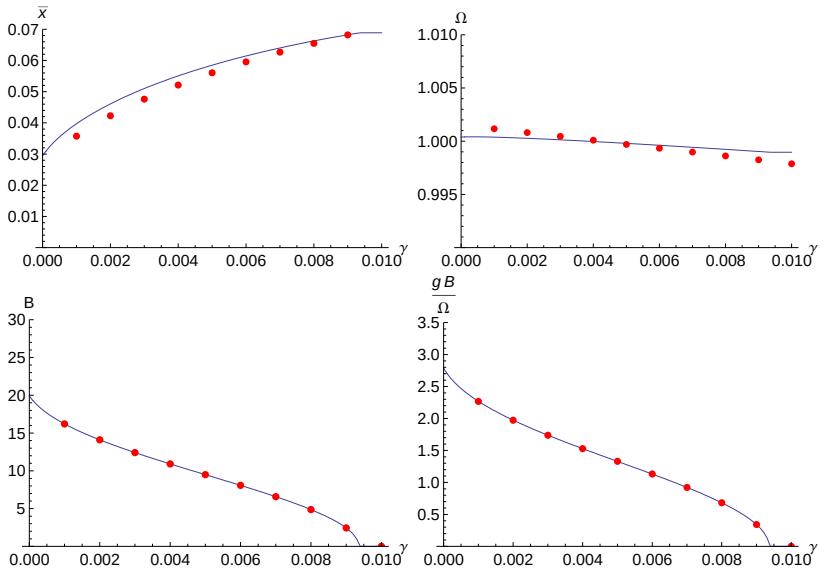

Abbildung 2.16: Parameter des Grenzzyklus als Funktion von γ (sonst Parametersatz A). Die roten Punkte markieren die Ergebnisse der numerischen Simulation.

Parameter γ: In Abb. 2.16 kann man gut den Schwellenwert γ_s erkennen. Wir erhalten eine sehr gute Übereinstimmung der Parameter des Grenzzyklus mit der Simulation.

[14] Siehe dazu auch [2] - dort wurde ein solches Verhalten im Experiment beobachtet.

Parameter Δ:
Die Ergebnisse (Abb. 2.17) decken sich gut mit denen aus der Simulation. Die Schwelle Δ_s, für die der erste Grenzzyklus zusammenbricht, ist gut zu erkennen. Wird der Startwert entsprechend angepasst, so kann auch der zweite Grenzzy-

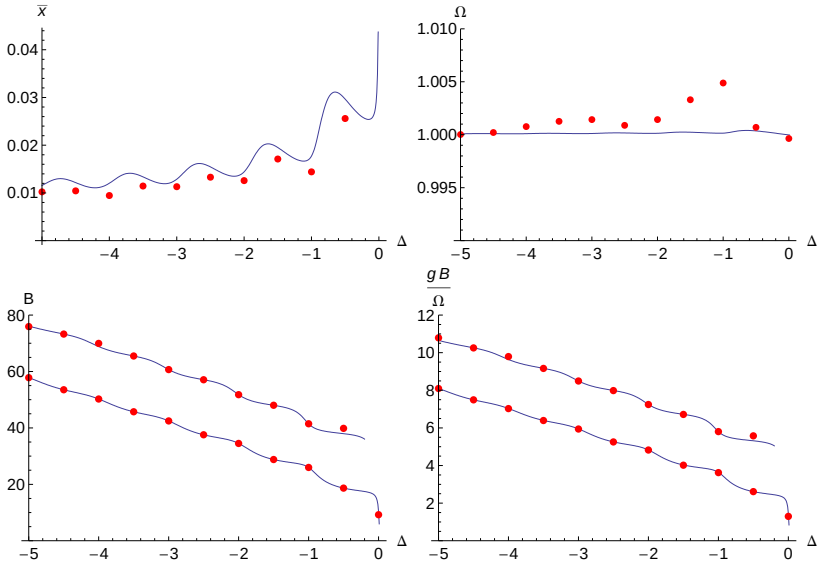

Abbildung 2.17: Parameter $\bar{x}$ und Ω des ersten und Amplitude B sowie $\frac{gB}{\Omega}$ beider Grenzzyklen als Funktion von Δ (sonst Parametersatz A). Die roten Punkte markieren die Ergebnisse der numerischen Simulation.

klus, der bereits in Abschnitt 2.3 beschrieben wurde, gefunden werden. Hier ist der Schwellenwert, an dem der Grenzzyklus zusammenbricht, ein minimal anderer. In Abb. 2.5 ist dies gut zu erkennen.
Interessant ist, wie sich der Bereich von Δ, für den ein Grenzzyklus existiert,

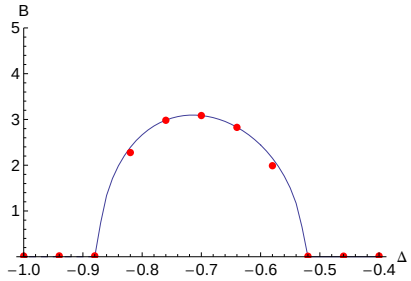

Abbildung 2.18: Amplitude B des Grenzzyklus als Funktion von Δ mit γ nahe der Schwelle γ_s (Parametersatz D).

verkleinert, wenn man die Dämpfung γ auf einen Wert nahe der Schwelle γ_s einstellt, in diesem Fall $\gamma = 9 \cdot 10^{-3}$ wie im Parametersatz D (siehe Abb. 2.18). Wir erkennen zwei neue Schwellen Δ_{s1} und Δ_{s2}.
Diese Schwellen kann man auch gut im Phasendiagramm der Regime in Abb.

2.5 erkennen. Mit einer großen Dämpfung γ bewegen wir uns im Bereich des Parametersatzes D, an der „Kuppe“ des Übergangs zwischen den Regimes ohne und mit einem Grenzzyklus aus Abb. 2.5.

2.4.2 Graphische Auswertung

Für die graphische Auswertung der Gleichungen (2.17), (2.22) und (2.23) werden jeweils die linke Seite (in rot) und rechte Seite (in grün) in Abhängigkeit von $\bar{x}$, B oder Ω dargestellt. Die Schnittpunkte zeigen dann mögliche Lösungen der Gleichung für den gesuchten Parameter des Grenzzyklus an.
An dieser Stelle sei auf die Bemerkungen zur physikalischen Interpretation der Gleichungen (2.17), (2.22) und (2.23) in Abschnitt 2.2.2 verwiesen:

- Gl.(2.23) fordert das Verschwinden der zeitgemittelten Leistung. Genauer wird die (negative) Reibungsleistung P_{fric} durch die Strahlungsleistung P_{rad} ausgeglichen. Hier also haben die roten Kurven die Bedeutung von $\frac{P_{fric}}{B}$ und die grünen die von $\frac{P_{rad}}{B}$.

- Gl.(2.22) ist eine zeitgemittelte Energiebilanzgleichung.

- Gl.(2.17) fordert das Verschwinden der zeitgemittelten Kraft. Daher werden in der graphischen Auswertung verschiedene Anteile dieser Kraft dargestellt.

Dafür müssen natürlich „geratene“ Lösungen für die jeweils anderen beiden Grenzzyklus-Parameter verwendet werden. Wir raten, indem wir die Ergebnisse aus der Simulation für den jeweiligen Parametersatz benutzen (nachzulesen in Tab. 2.1).
Solch eine graphische Auswertung erhöht das Verständnis für die Struktur der Lösungen. Das heißt, wir entwickeln ein Gefühl dafür, in welchen Parameterbereichen welches Regime (in Bezug auf die Anzahl an Grenzzyklen) auftritt. Außerdem ergibt sich eine analytische Methode, die Schwellenwerte g_s, γ_s und Δ_s durch Bestimmung einer Funktion θ genau zu bestimmen. Diese Methode wurde auch benutzt, um das Phasendiagramm in Abb. 2.5 zu erstellen.

Parametersatz A: Bevor die Parametersätze an den Schwellen untersucht werden, wollen wir anhand des Referenz-Parametersatzes A ein allgemeines Verständnis für die graphische Lösungsmethode gewinnen.
Die einzelnen Kurven (Abb. 2.19 und Abb. 2.20) ergeben sich aus der Aufsummierung der Seitenbänder kl aus Abb. 2.1 bzw. der rl und il aus den Abbildungen 2.3 und 2.4. In Abb. 2.19 ist eine Art deformierter Glocke zu erkennen, die sich aus den beitragenden Lorentzglocken ergibt. Da deren Funktionswerte sehr klein sind, ergibt sich ein entsprechend kleiner Schnittpunkt bei $\bar{x} \approx 0.03$.

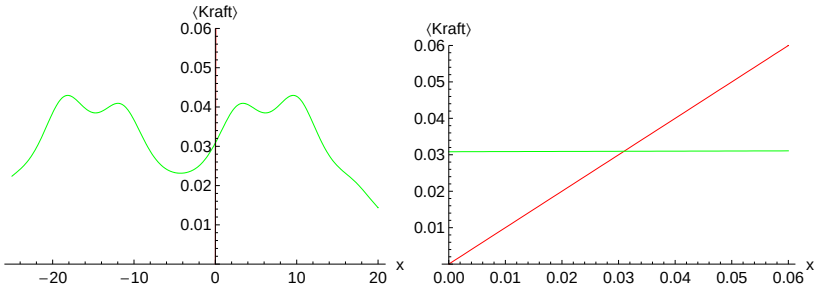

Abbildung 2.19: Parametersatz A: Graphische Lösung für $\bar{x}$ aus der 0. Harmonischen (vergrößert rechts, aus Gl.(2.17))

In Abb. 2.20 für den Realteil ist die rot gezeichnete nach unten offene Parabel diejenige, die wegen der kleinen Funktionswerte der r_l den Schnittpunkt und somit die Lösung bei $\Omega \approx 1$ bestimmt. Der Imaginärteil liefert mehrere Lösungen, die noch erläutert werden [15].

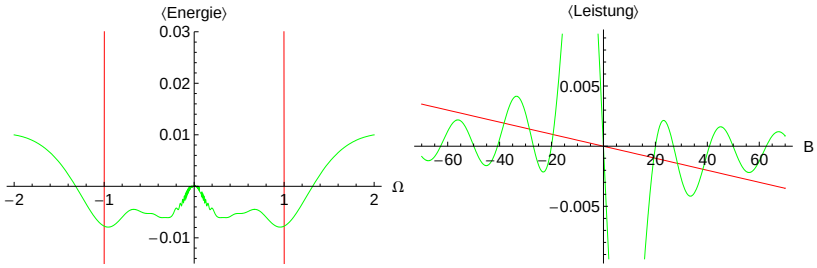

Abbildung 2.20: Parametersatz A: Links die graphische Lösung aus der 1. Harmonischen für Ω aus dem Realteil (aus Gl.(2.22)) und rechts für B aus dem Imaginärteil (aus Gl.(2.23))

Insgesamt ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus der Simulation (2.3).

Für die Amplitude des Grenzzyklus B ergeben sich vier Lösungen. Zwei davon entsprechen gut den Grenzzyklen aus der Simulation ($B = 19.3$ und $B = 38.2$). Auch die Lösung $B = 0$ ist aus der Simulation, zum Beispiel aus **Parametersatz B** bekannt.
Die vierte Lösung bei $B = 28.54$ taucht in der Simulation als instabiler Punkt auf. Dass diese Lösung instabil ist, erkennt man auch an der graphischen Lösung. Die kritische Größe ist dabei die Differenz von Strahlungsleistung (grün) und Reibungsleistung (rot). Sie kann als resultierende Energiedissipation interpretiert werden. Verschwindet sie, so gibt es eine Lösung (Schnittpunkte in Abb. 2.20, Nullstellen in Abb. 2.21). Instabil ist eine Lösung immer dann, wenn bei einer kleinen positiven Störung der Amplitude die resultierende Energiedissipation abnimmt und somit die Störung noch verstärkt und umgekehrt. Stabil

[15] Die negativen Lösungen, die sich hier ergeben, sind mathematischer Natur und physikalisch nicht sinnvoll. Daher können sie ignoriert werden.

ist sie jedoch, wenn bei einer positiven Störung der Amplitude die resultierende Energiedissipation zunimmt, und somit die Amplitude wieder verkleinert.

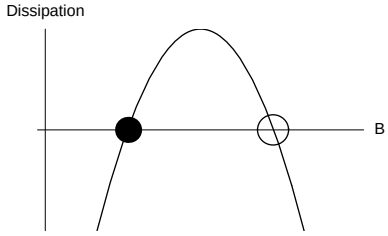

Abbildung 2.21: Resultierende Energiedissipation - Stabile und instabile Lösung.

Parametersatz B, Schwelle g_s: In Abb. 2.22, links und mitte, ist das Schwellenverhalten bei Parametersatz B graphisch erklärt: Es findet ein Übergang statt von keiner Lösung mit $B \neq 0$ zu einer bei wachsendem g sehr schnell bis auf Werte von $B \approx 70$ anwachsenden Lösung. Dieser Übergang wird markiert durch den Schwellenwert g_s.

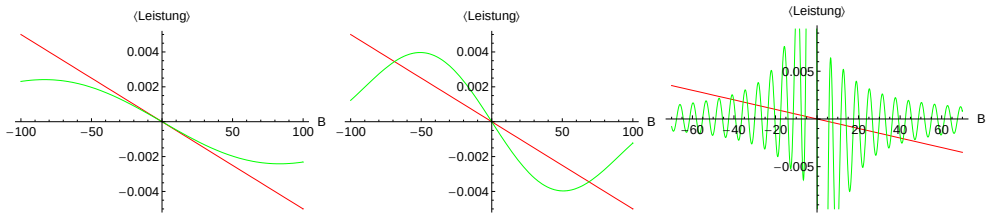

Abbildung 2.22: Graphische Lösung für B aus dem Imaginärteil für $g = 0.014$ bzw. $g = 0.023$ (links bzw. mitte, Parametersatz B) und $g = 0.5$ mit $\bar{x} = 0.1$ (rechts, Tendenz Richtung Parametersatz C)

Den Schwellenwert g_s, ab dem kein Schnittpunkt mehr vorhanden ist, kann man sehr gut analytisch bestimmen. Dazu wird die Steigung der linken mit der der rechten Seite der Gleichung (2.23), also der roten und der grünen Kurve in Abb. 2.24,

$$-\frac{P_{fric}}{B} = -\frac{\gamma\Omega}{2}B \stackrel{!}{=} g\kappa^2 \sum_l i_l = \frac{P_{rad}}{B}$$

an der Stelle $B = 0$ verglichen. Für das Vorhandensein einer Lösung $B \neq 0$ fordere also

$$\theta := \frac{\gamma\Omega}{2} + g\kappa^2\, \partial_B \left(\sum_l i_l \right)_{B=0} \stackrel{!}{<} 0.$$

In Abb. 2.23 ist θ als Funktion von g dargestellt. Die Nullstelle von θ markiert die Schwelle g_s.
In Abb. 2.22 (rechts) ist der Fall eines leicht erhöhten Parameters g darge-

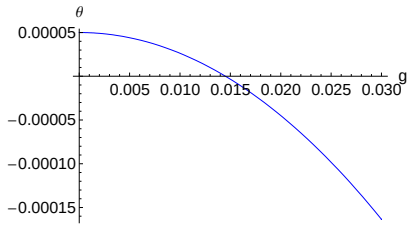

Abbildung 2.23: Für negatives θ ist eine Lösung für $B \neq 0$ vorhanden. Der Schwellenwert beträgt $g_s = 0.0145$.

stellt. Dies kann eine erhöhte Inputleistung bedeuten, es geht in die Richtung des **Parametersatzes C**. Sehr schön ist der Effekt zu erkennen, dass die rechte Seite der Gleichung (2.23) viel schneller in B oszilliert. Das bedeutet, dass mehr Schnittpunkte auftreten und die Lösungen, und somit auch die Grenzzyklen, näher beieinander liegen. Dies erklärt auch die bereits erwähnte starke Abhängigkeit der Systemdynamik von den Startwerten bei großem g.

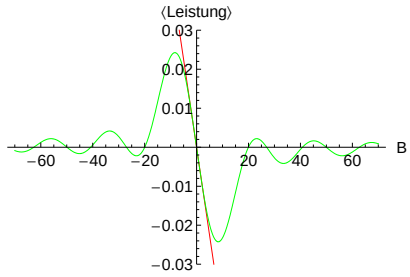

Abbildung 2.24: Parametersatz D: Graphische Lösung für B aus dem Imaginärteil für $\gamma = 0.009$ mit $\bar{x} = 0.068$

Parametersatz D, Schwellen γ_s, Δ_{s1} und Δ_{s2}: In Abb. 2.24 erkennt man, dass die Vergrößerung der mechanischen Dämpfung γ durch die steilere Steigung der Geraden den Schnittpunkt bei deutlich kleinerer Amplitude B liefert. Mit derselben Überlegung wie für die Schwelle g_s kann auch hier das Schwellenverhalten gut analytisch verstanden werden. In Abb. 2.25 ist θ über der mechanischen Dämpfung γ aufgetragen. Die Schwelle γ_s ist klar als Nullstelle von θ zu erkennen, und liefert eine sehr gute Übereinstimmung mit der Simulation.
Wir variieren für diesen Parametersatz mit der vergrößerten Dämpfung in θ wieder die Verstimmung Δ. Wir erhalten eine genaue Bestimmung der Schwellen Δ_{s1} und Δ_{s2} in guter Übereinstimmung mit der Simulation (Abb. 2.26).

Parametersatz E, Schwelle Δ_s: In Abb. 2.27 (links) erkennt man eine verkleinerte Amplitude der grünen Kurve ($\propto \sum_l i_l$), was dazu führt, dass nur noch eine Lösung für ein kleines B existiert. Wird die Verstimmung über den Schwel-

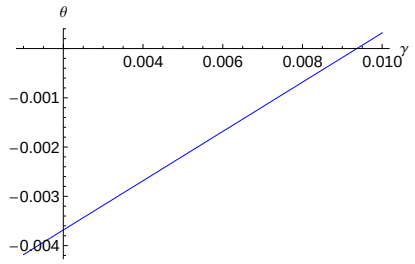

Abbildung 2.25: Für negatives θ ist eine Lösung für $B \neq 0$ vorhanden. Der Schwellenwert beträgt $\gamma_s = 9.4 \cdot 10^{-3}$.

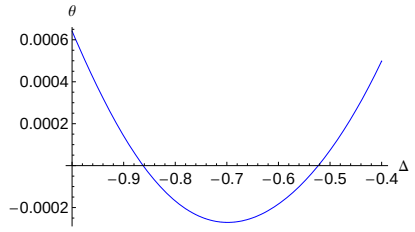

Abbildung 2.26: Für negatives θ ist eine Lösung für $B \neq 0$ vorhanden. Die Schwellenwerte betragen $\Delta_{s1} = -0.86$ und $\Delta_{s2} = -0.52$.

lenwert $\Delta_s \approx 0.016$ erhöht, so klappt die gesamte grüne Kurve um, sie ändert ihr Vorzeichen (Abb. 2.27, rechts). Somit gibt es nur noch die Lösung $B = 0$ und das System hat keinen Grenzzyklus mehr. Anfängliche Oszillationen klingen ab.
Dass das Umklappen erst bei positiven Verstimmungen erfolgt, kann man sich analytisch auch klarmachen, wenn man i_l als Funktion von Δ betrachtet: Die Extrema der i_l liegen bei $0.5(2g\bar{x} - (1 - 2l)\Omega)$. Das Minimum von i_0 liegt also bei $g\bar{x} - 0.5\Omega$, während das von i_{-1} bei $g\bar{x} + 0.5\Omega$ liegt. Daher kreuzen sich beide Kurven genau bei $\Delta = g\bar{x}$. An dieser Stelle von Δ wechselt der Summand, der am meisten zum Imaginärteil beiträgt. Dieser Wechsel bewirkt dann auch das „Umklappen“ und somit das Verschwinden einer Lösung $B > 0$. Im Phasendiagramm in Abb. 2.5 ist diese Abhängigkeit der Schwelle Δ_s von $g\bar{x}$ schwer zu erkennen, aber sie ist da. Aus der Analytik und der Simulation wissen wir, dass mit der Kopplung g auch die konstante Auslenkung $\bar{x}$ steigt, siehe Abb. 2.15. Da aber beide Werte im von uns untersuchten Parameterbereich deutlich kleiner als eins sind, wirkt sich beider Vergrößerung nur in geringem Maße auch auf den Wert für die Schwelle Δ_s aus.

Die gleichen analytischen Überlegungen wie schon für die beiden Schwellen g_s und γ_s liefern die Größe θ, die hier (siehe Abb. 2.28, rechts) als Funktion von Δ die Schwelle Δ_s in guter Übereinstimmung mit der Simulation liefert.
In Abb. 2.28, mitte, ist eine weitere Nullstelle zu erkennen. Dies bedeutet jedoch nicht, dass eine weitere Schwelle, an der der Grenzzyklus zusammenbricht, gefunden wurde. Vielmehr ist die einzige Bedeutung dieser Nullstelle, dass die

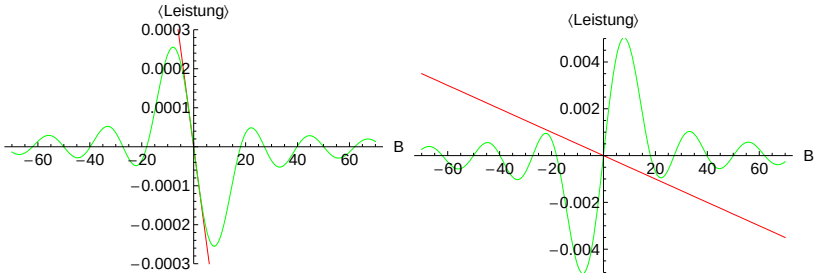

Abbildung 2.27: Parametersatz E: $\Delta = 0.015$ mit $\bar{x} = 0.136$ (links) , $\Delta = 0.1$ mit $\bar{x} = 0.1375$ (rechts)

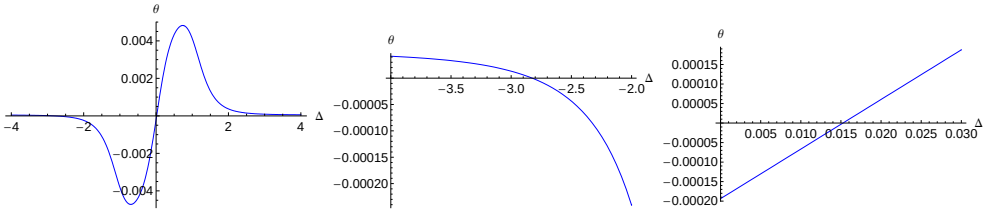

Abbildung 2.28: θ als Funktion von Δ, links. In der Mitte und rechts sind die Nullstellen vergrößert dargestellt. Der Schwellenwert (rechts) beträgt $\Delta_s = 0.0151$.

Steigung der linken Seite von Gl.(2.23) an der Stelle $B = 0$ wieder unter die der rechten Seite fällt. In den Abbildungen 2.29 ist gut zu erkennen, dass dieses Phänomen nur eine neue instabile Lösung für B produziert.

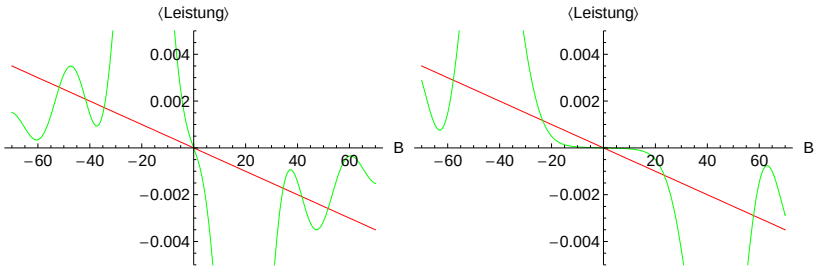

Abbildung 2.29: Für negative Verstimmungen von noch größerem Betrag als in Parametersatz A (links $\Delta = -2$, rechts $\Delta = -5$) nähert sich die grüne Kurve an der Stelle $B = 0$ einer waagerechten Tangente an die B-Achse.

Parametersatz F: Wenn die Verstimmung weiter vergrößert wird, so wächst die Amplitude des Bessel-Teils wieder und zwischen $\Delta = 0.1$ und $\Delta = 0.6$ (Abb. 2.30, links) überschreitet sie den Punkt, an dem wieder Lösungen $B \neq 0$ auftauchen. Ähnliche Überlegungen zur resultierenden Dissipation wie schon für Parametersatz A erklären, dass sich das System erst ab einem Startwert ober-

halb eines instabilen Punktes bei $x(0) \approx 21.5$ in den Grenzzyklus bei $B = 25.5$ entwickelt. Allerdings verschwinden diese Lösungen bei weiterer Vergrößerung der Verstimmung wieder, wie in Abb. 2.30 (rechts) bei $\Delta = 0.8$ zu erkennen ist.

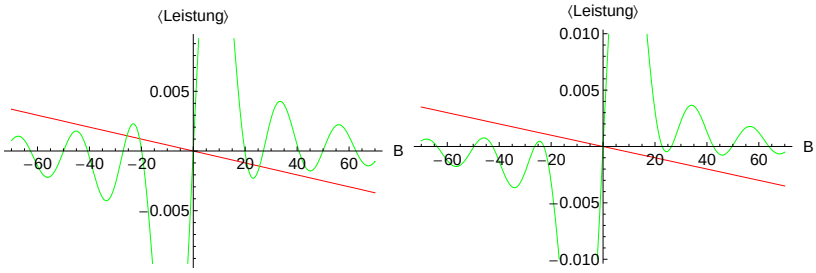

Abbildung 2.30: Parametersatz F: $\Delta = 0.6$ mit $\bar{x} = 0.071$ (links) und $\Delta = 0.8$ mit $\bar{x} = 0.05$ (rechts)

2.4.3 Höhere Harmonische

Hier soll nun die Bedingung

$$|D_n| \ll |D_1| \quad \text{für} \quad n \geq 2 \tag{2.28}$$

aus Abschnitt (2.2.2) mit

$$D_n = \frac{g \sum_l \alpha_l \alpha_{l+n}^*}{1 - n^2\Omega - \mathrm{i}n\Omega\gamma} \tag{2.29}$$

getestet werden. Zunächst stellen wir dazu einige analytische Überlegungen an.

Der Nenner in Ausdruck (2.29) hat einen entscheidenden Einfluss. Während er für $n = 1$ einen großen Faktor $\propto 1/\gamma$ liefert, ist er sonst $\propto n^2$ und liefert somit einen Faktor $\propto 1/n^2$. Zusätzlich betrachten wir die Struktur, die sich durch $\sum_l \alpha_l \alpha_{l+n}^*$ mit

$$\alpha_l = (-1)^l \, J_l\left(\frac{gB}{\Omega}\right) \frac{\kappa}{\kappa + \mathrm{i}\Delta - \mathrm{i}g\bar{x} + \mathrm{i}l\Omega} \quad .$$

ergibt. Das Produkt aus den lorentzartigen Brüchen in $\sum_l \alpha_l \alpha_{l+n}^*$ wird mit wachsendem Abstand der Glocken n kleiner, nämlich $\propto \kappa/(n\Omega)$. Da für kleine Besselargumente nur wenige Seitenbänder relevant sind, trägt in diesem Fall für große Abstände n keiner der Summanden $\sum_l J_l J_{l+n}$ wesentlich bei. Für große Besselargumente müssen diese Abstände n entsprechend größer sein, aber zusammen mit den obigen Argumenten bleibt insgesamt die Relation 2.28 plausibel.

Die Bedingung (2.28) wird für verschiedene Parametersätze und die entsprechenden Parameter des Grenzzyklus zusätzlich konkret getestet. Dazu wird D_n

aus (2.25) so ausgewertet, dass nur die relevanten Seitenbänder mitgenommen werden. Konkret heißt das, dass die Summe in Gl.(2.29) nur bis mindestens zum dritten Glied läuft. Die Auswertung ergibt, dass $|D_2|$ tatsächlich für verschiedenste Parametergruppen um drei bis vier Größenordnungen kleiner ist als $|D_1|$. Somit ist die Bedingung zur Vernachlässigung der höheren Harmonischen erfüllt.

Auswertung: Näherung kleiner Besselargumente Eine Auswertung der Gleichungen (2.17), (2.22) und (2.23) in der Näherung kleiner Besselargumente ist nur für bestimmte, kleine Parameterbereiche in der Nähe der Schwellen g_s, γ_s und Δ_s gerechtfertigt.
Die so gewonnenen Ergebnisse liefern keine neuen Erkenntnisse. Vielmehr bestätigen sie für ihren kleinen Gültigkeitsbereich die in Abschnitt 2.4 gezogenen Schlussfolgerungen für das Systemverhalten. Deshalb wird die Auswertung für die Näherung kleiner Besselargumente in den Anhang A ausgelagert.

III
Synchronisation

Will man eine analytische Methode zur Beschreibung von Synchronisation entwickeln, muss man zunächst einige Annahmen machen. Wir werden hier stets von einer *kleinen* äußeren Triebkraft, beziehungsweise von einer geringen Kopplung des Systems an diese Triebkraft ausgehen. Dann nämlich können wir weiter davon ausgehen, dass im Wesentlichen nur die Phase des selbsterregten Oszillators beeinflusst wird.
Wir folgen im Abschnitt 3.1 bei der Herleitung der analytischen Techniken eng dem Buch von Pikovsky et al. [11]. Es wird mit einer Störungstechnik eine einfache analytische Phasengleichung abgeleitet. Diese Phasengleichung wird dann im Abschnitt 3.2 für den opto-mechanischen Oszillator (OMO) aufgestellt und so seine Synchronisationseigenschaften untersucht.
Wie auch in Kapitel 4 ist hier viel bereits mit einer analytischen Theorie zu verstehen. Auf eine Simulation wurde für die Synchronisation und das Rauschen verzichtet.

3.1 Theorie zur Synchronisation

Gehen wir von einem ungestörten System mit den Systemvariablen $\vec{x}$ aus, das die Bedingungen an einen selbsterregten Oszillator erfüllt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x} = \vec{f}(\vec{x}).$$

Dieses System soll einen Grenzzyklus an der so genannten natürliche Frequenz Ω haben.
Nun fügen wir mit einer kleinen Kopplungskonstante ϵ eine mit ω oszillierende periodische Triebkraft $\vec{p}$ hinzu. Wir erhalten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x} = \vec{f}(\vec{x}) + \epsilon\,\vec{p}(\vec{x}, t) \tag{3.1}$$

Phase und Isochronen: Wir definieren eine Phase für das ungestörte System durch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi = \Omega\ . \tag{3.2}$$

Wie bereits in der Einleitung (Abschnitt 1.2) erklärt, ist die Phase auf dem Grenzzyklus eines selbsterregten Oszillators neutral stabil. Das bedeutet, dass der Grenzzyklus im Phasenraum der Systemvariablen $\vec{x}$ einen Lyapunovexponenten gleich null hat. Das ist genau derjenige, der zu Störungen entlang des Grenzzyklus gehört. Die anderen Exponenten gehören zu Störungen in Querrichtungen und sind negativ. Positive Lyapunovexponenten gibt es bei einem Grenzzyklus naturgemäß nicht. Kommt eine schwache äußere Triebkraft dazu,

wird die Trajektorie quer zum Grenzzyklus nur leicht von ihrem ursprünglichen stabilen Weg abgelenkt. Anders verhält es sich entlang der Trajektorie. Hier können große Abweichungen entstehen. Das rechtfertigt dann die Wahl der Phase als einzige Variable zur Beschreibung der gestörten Dynamik.

Die Phase muss nun aber in einem System wie (3.1) nicht nur auf dem Grenzzyklus selbst, sondern auch in dessen unmittelbarer Umgebung definiert werden. Um dieses Ziel zu erreichen, werden Isochronen definiert. Das ist eine Schar von Hyperflächen im Phasenraum, die den Grenzzyklus schneiden und dabei invariant unter einer $\frac{2\pi}{\Omega}$-stroboskopischen Abbildung sind.

Die Gleichung für die Phasendynamik: Ist die Phase einmal in der Nähe des Grenzzyklus $\vec{x}_0$ formal definiert, so kann man Gleichung (3.2) für das ungestörte System mit Gl.(3.1) auch so

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(\vec{x}) = \sum_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_k = \sum_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\; f_k(\vec{x}) = \Omega$$

schreiben. Für das gestörte System hingegen gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(\vec{x}) = \sum_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\;\left(f_k(\vec{x}) + \epsilon p_k(\vec{x},t)\right) = \Omega + \epsilon \sum_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\; p_k(\vec{x},t)\;.$$

Wir nähern nun unter der Annahme einer kleinen Kopplung ϵ und somit kleiner Abweichungen der Trajektorie $\vec{x}$ vom Grenzzyklus $\vec{x}_0$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(\vec{x}) = \Omega + \epsilon \sum_k \frac{\partial \Phi(\vec{x}_0)}{\partial x_k}\; p_k(\vec{x}_0,t)$$

Da man die Phase für das System, das man untersuchen will, genau auf dem Grenzzyklus definiert hat, kann man für jeden Punkt auf dem Grenzzyklus $\vec{x}_0 = \vec{x}_0(\Phi)$ schreiben. Somit erhalten wir eine geschlossene Gleichung für die Phase:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi = \Omega + \epsilon \underbrace{\sum_k \frac{\partial \Phi(\vec{x}_0(\Phi))}{\partial x_k}\; p_k(\vec{x}_0(\Phi),t)}_{=:Q(\Phi,t)}\;. \tag{3.3}$$

$Q(\Phi,t)$ ist eine 2π - periodische Funktion von Φ und eine $\frac{2\pi}{\omega}$ - periodische Funktion von t.

Näherung langsamer Phasendynamik: In nullter Näherung ($\epsilon = 0$) hat Gleichung (3.3) die Lösung $\Phi = \Omega t + \varphi_0$. Wird dies nun in in die Funktion Q eingesetzt und deren oben genannte periodische Eigenschaften berücksichtigt, so kann man Q als Fourier-Reihe schreiben und erhält:

$$Q(\Phi,t) = \sum_{l,k} q_{l,k}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\Omega + l\omega)t}$$

Die langsam veränderlichen Resonanzterme mit $k\Omega+l\omega \approx 0$ sind die essenziellen Terme für die Dynamik der Phase. Sie können zu großen, wenn auch wegen ϵ langsamen Veränderungen der Phase führen. Nehmen wir nun an den speziellen Fall an, dass die Frequenz der Triebkraft ω in der Nähe der natürlichen Frequenz Ω liegt. Dann sind im Wesentlichen nur die Terme mit $k = -l$ resonant.
Aufgrund dieser Überlegungen können wir nun ein neues, gemitteltes Q,

$$q(\Phi - \omega t) = \sum_k q_{-k,k}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\Phi-\omega t)}$$

schreiben, das nun keine schnell oszillierenden Terme mehr enthält.
Damit ergibt sich aus (3.3) für eine langsame Phasendynamik:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi = \Omega + \epsilon\, q(\Phi - \omega t)$$

Synchronisationsbereich: Hier wird zunächst eine neue Variable definiert, nämlich die Differenz zwischen der Phase des Systems und der Phase der äußeren Triebkraft:

$$\Psi(t) = \Phi(t) - \omega t$$

Mit der Verstimmung ν

$$\nu := \omega - \Omega$$

erhalten wir eine Gleichung für die Dynamik der Phasendifferenz:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi = -\nu + \epsilon\, q(\Psi)\ . \tag{3.4}$$

Diese Phasendifferenz wird in einem mit ω rotierenden Bezugssystem zu einer langsamen Phase. Diese Phasendynamik verrät nun einiges über die Synchronisationsbereiche: Genau dann, wenn die Zeitableitung von Ψ verschwindet, liegt Synchronisation vor. Die beiden Phasen der Oszillationen des getriebenen Systems und der Triebkraft sind eingerastet. Das System schwingt im Gleichtakt mit der Triebkraft, die beiden sind synchronisiert.
Da nun q eine 2π - periodische Funktion ist, hat sie in einem Intervall $[0, 2\pi)$ von Ψ mindestens ein Maximum q_{max} und Minimum q_{min}. Also gibt es, falls die Verstimmung ν im Intervall

$$\epsilon\, q_{min} < \nu < \epsilon\, q_{max} \tag{3.5}$$

liegt, mindestens ein Paar stationärer Lösungen für Ψ. Einer dieser Fixpunkte ist stabil. Das System wird sich also in seine Richtung entwickeln und dann dort bleiben: Dann ist Synchronisation erreicht.
Wir können in Abb. 3.1, rechts, gut erkennen, dass außerhalb des Intervalls aus Gl.(3.5) $\dot{\Psi}$ nicht verschwinden kann. Außerhalb der so definierten Arnoldzunge tritt keine Synchronisation auf.

Physikalisch kann die Dynamik der Phasendifferenz als die eines überdämpften Teilchens in einem eindimensionalen Potenzial betrachtet werden. Die deterministische Kraft in Gl.(3.4) kann tatsächlich geschrieben werden als:

$$-\nu + \epsilon q(\Psi) = -\frac{dV}{d\Psi}$$

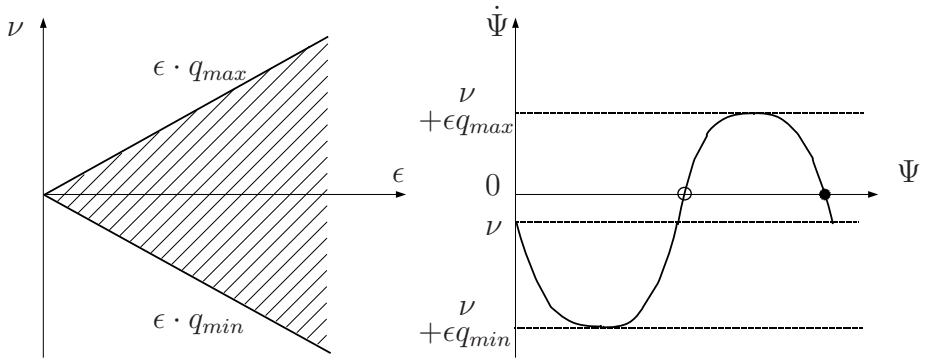

Abbildung 3.1: Links die Arnoldzunge, die den Synchronisationsbereich markiert. Rechts ist $\dot{\Psi}$ über Ψ aufgetragen, so dass die Fixpunkte zu erkennen sind.

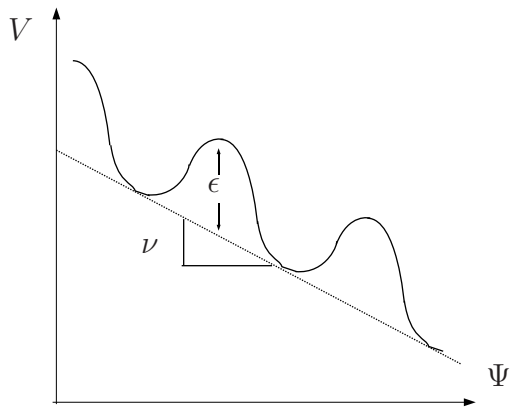

Abbildung 3.2: Potenzial $V(\Psi)$. Der Parameter ν bestimmt die Neigung, die Funktion $q(\Psi)$ die Struktur und ϵ deren Ausprägung ("Amplitude")

mit dem Potenzial

$$V(\Psi) = \nu\Psi - \epsilon \int^{\Psi} q(x)dx$$

Dieses Potenzial (Abb. (3.2)) macht nochmals anschaulich deutlich, wie die Parameter ν , ϵ und die Funktion $q(\Psi)$ den Synchronisationsbereich bestimmen. Wenn das Potenzial lokale Minima besitzt, so wie in Abb.(3.2) dargestellt, besteht Synchronisation, die Phasendifferenz bleibt konstant. Wenn diese Minima fehlen, dann bewegt sich das Teilchen konstant abwärts, die Phasendifferenz wächst (oder sinkt abhängig vom Vorzeichen der Verstimmung). Bei verschwindender Verstimmung ist es egal, ob es lokale Minima gibt oder nicht. Die Phasendifferenz ist mindestens neutral stabil.

3.2 Synchronisation des OMO

Unser Ziel ist es, Synchronisation an dem in der Einleitung in Abschnitt 1.1 beschriebenen System zu untersuchen. Dieses System, der OMO, erfüllt die Voraussetzungen für Synchronisation, denn es ist ein selbsterregter Oszillator: Es ist autonom, weil es, analog zum Gewicht für die Pendeluhr, auch hier lediglich eine konstante Energiezufuhr durch das Pumplicht gibt. Es ist offensichtlich dissipativ, aber dennoch oszilliert es wegen der zusätzlichen negativen Dämpfung durch das Licht stabil in seinem mechanischen Freiheitsgrad auf einem Grenzzyklus.

Womit kann nun der OMO synchronisieren? Welche Form könnte die externe Triebkraft $\vec{p}$ haben? Wir werden hier folgendes Modell aufbauen: Über die konstante Pumpleistung wird ein mit ω moduliertes Signal gelegt. Dessen Frequenz soll der der natürlichen Frequenz Ω des selbsterregten Oszillators, also der Frequenz unseres Systems im Grenzzyklus, nahekommen.

Dieses modulierte Signal könnte praktisch erzeugt werden, indem zum Beispiel ein zweites System dieser Art ein Ausgangssignal erzeugt. Dieses ist nämlich mit der natürlichen Frequenz des mechanischen Oszillators moduliert. So könnte man also mithilfe des einen mechanischen Oszillators über eine Kopplung aus Licht den anderen synchronisieren[1].

Phasendynamik: Zunächst muss die Phase auf dem Grenzzyklus für den OMO durch

$$\Phi = \Omega t + \varphi_0 \tag{3.6}$$

definiert werden. Um Gl.(3.3) auszuwerten, müssen wir die Phase in der Form $\Phi(\vec{x}_0)$ finden, also als Funktion der Systemvariablen $\vec{x} := (x, p, a, a^\dagger)$ auf dem Grenzzyklus.
Dazu werden nun die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= p(t) \\ \dot{p}(t) &= -x(t) - \gamma p(t) + g a^\dagger a(t) \end{aligned} \tag{3.7}$$

und die Gleichung für den Grenzzyklus

$$x(t) = \bar{x} + B\cos(\Phi) \tag{3.8}$$

benutzt. Durch zeitliche Ableitung von Gl.(3.8) und Einsetzen in Gl.(3.7) erhalten wir mit $\dot{\Phi} = \Omega$ und $\ddot{\Phi} = 0$ nach Umstellung nach Φ

$$\Phi(\vec{x}_0) = \arctan\left(\frac{\Omega\, p}{-x - \gamma p + g\, a^\dagger a}\right).$$

[1] Eine andere Möglichkeit wäre es, zwei Oszillatoren auf diesem Wege gegenseitig zu synchronisieren, indem man das Ausgangssignal des einen jeweils als Eingangssignal des anderen benutzt.

Mit einer Triebkraft $p_k(\vec{x}) = (0, 0, \epsilon\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \epsilon\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})$ werden die Bewegungsgleichungen zu

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= p(t)\ , \\
\dot{p}(t) &= -x(t) - \gamma p(t) + g a^\dagger a(t)\ , \\
\dot{a}(t) &= -\left(\kappa + \mathrm{i}\Delta\right) a(t) + \mathrm{i}g x(t) a(t) + \kappa + \epsilon\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\ , \\
\dot{a}^\dagger(t) &= -\left(\kappa - \mathrm{i}\Delta\right) a^\dagger(t) - \mathrm{i}g x(t) a^\dagger(t) + \kappa + \epsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.
\end{aligned}$$

Damit werten wir nun den Ausdruck für die Phasendynamik im gestörten System aus. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi &= \Omega + \sum_{k=x,p,a,a^\dagger} \frac{\partial\, \Phi(\vec{x}_0)}{\partial k} \cdot p_k(\vec{x}) \\
&= \Omega + \epsilon\, \underbrace{\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \partial_a \Phi(\vec{x}_0) + c.c\right)}_{=:\, Q(\Phi,t)}.
\end{aligned}$$

Mit $F_a(\vec{x}_0) := \partial_a \Phi(\vec{x}_0)$. erhalten wir

$$\begin{aligned}
Q(\vec{x}_0, t) = &\quad F_a(\vec{x}_0)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + c.c. \\
= &\quad \frac{-g\Omega p \left(a^\dagger \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + c.c.\right)}{\left(-x - \gamma p + g\, a^\dagger a\right)^2 + \left(\Omega\, p\right)^2}\ .
\end{aligned}$$

Damit die Phasengleichung wirklich geschlossen wird, müssen nun die Systemparameter auf dem Grenzzyklus $\vec{x}_0$ wieder durch die Phase ausgedrückt werden. Dazu werden folgende Ersetzungen aus Kapitel 2 verwendet:

$$\begin{aligned}
x &= \bar{x} + B\cos\Phi \\
p &= -B\dot{\Phi}\sin\Phi \\
a &= \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}gB}{\dot{\Phi}}\sin\Phi} \sum_k \alpha_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Phi} \\
a^\dagger &= \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}gB}{\dot{\Phi}}\sin\Phi} \sum_k \alpha_k^* \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\Phi} \\
a^\dagger a &= \sum_{n,m} \alpha_n \alpha_m^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\Phi}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

So erhalten wir $Q(\Phi, t) = F_a(\Phi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + c.c.$ mit

$$F_a(\Phi) = \frac{gB\Omega^2 \sin(\Phi) \left(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}gB}{\Omega}\sin\Phi} \sum_k \alpha_k^* \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\Phi}\right)}{\left(-\bar{x} - B\cos\Phi + \gamma B\Omega\sin\Phi + g\, \left(\sum_{n,m} \alpha_n \alpha_m^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\Phi}\right)\right)^2 + \left(B\Omega^2 \sin\Phi\right)^2},$$

wobei

$$\alpha_n = (-1)^n J_n(\frac{gB}{\Omega}) \frac{\kappa}{\kappa + \mathrm{i}\Delta - \mathrm{i}g\bar{x} + \mathrm{i}n\Omega}\ .$$

Langsame Phasendynamik: In der Näherung der langsamen Phasendynamik ergibt sich für $Q(\Phi, t)$ als Fourier-Reihe in Φ und t,

$$Q(\Phi, t) = \sum_{l,k} \widehat{Q}_{l,k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Phi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}l\omega t} \tag{3.10}$$

der gemittelte Ausdruck für unseren Fall mit der Phasendifferenz $\Psi = \Phi - \omega t$ zu

$$\begin{aligned} q(\Phi, t) &= \sum_k \widehat{Q}_{-k,k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Psi} \\ &= \underbrace{\widehat{Q}_{-1,1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi}}_{k=-1} + \underbrace{\widehat{Q}_{1,-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Psi}}_{k=1} \end{aligned}$$

Es gibt hier nur zwei beitragende Fourierkoeffizienten, weil sich die Periodizität in t auf die erste Harmonische beschränkt.

Nun müssen also die Fourierkoeffizienten $\widehat{Q}_{-1,1}$ und $\widehat{Q}_{1,-1}$ gefunden werden. Aus (3.10) folgt

$$\widehat{Q}_{l,k} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{T} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\Phi \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \quad Q(\Phi, t) \ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\Phi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_l t}$$

mit $T = \frac{2\pi}{\omega} = t_2 - t_1$ und $\omega_l = \omega\, l$. Daraus ergibt sich für die Fourierkoeffizienten:

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_{-1,1} &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{T} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\Phi \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \quad \left(F_a(\Phi) + F_{a^\dagger}(\Phi) \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t}\right) \ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\Phi \quad \epsilon F_a(\Phi) \ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi} \end{aligned}$$

und $\widehat{Q}_{1,-1} = \widehat{Q}^*_{-1,1}$. Wir erhalten also

$$q(\Psi) = \widehat{Q} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi} + \widehat{Q}^* \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Psi}, \tag{3.11}$$

wobei das Integral zur Bestimmung von $\widehat{Q}$ nicht analytisch lösbar ist.

Synchronisationsbereich, Analytische Bestimmung: Mit der Phasendynamik

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Psi = -\nu + \epsilon\, q(\Psi)$$

für die Phasendifferenz $\Psi(t) = \Phi(t) - \omega t$ mit der Verstimmung $\nu := \omega - \Omega$ zwischen natürlicher Frequenz des OMO und der Frequenz der Triebkraft und

$$\epsilon\, q_{min} < \nu < \epsilon\, q_{max}$$

als Definition des Synchronisationsbereiches stellt sich nun die Aufgabe, die Maxima und Minima der Funktion $q(\Psi)$ (Gl.(3.11)) zu finden. Die oszillierende

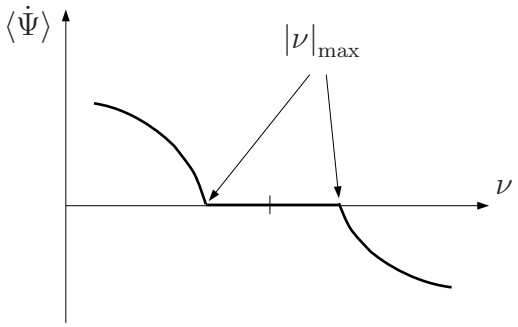

Abbildung 3.3: Synchronisationsplateau mit den Rändern bei $|\nu|_{max}$.

Funktion $q(\Psi)$ besitzt Extremwerte an den Stellen $\Psi_n = \frac{\mathrm{i}}{2}\ln\left(\frac{\widehat{Q}}{\widehat{Q}^\dagger}\right) + n\pi$ mit $n \in \quad :$

$$q_{extr} = \pm 2\left|\widehat{Q}\right|.$$

Wir suchen den maximalen Betrag der Verstimmung $|\nu|_{max}$, für den noch Synchronisation auftritt

$$|\nu|_{max} = 2\epsilon\left|\widehat{Q}\right|.$$

Diese Größe markiert den Rand des Synchronisationsplateaus (siehe Abb. 3.3). Sie kann gut als Funktion der Systemparameter dargestellt werden. So können wir die Synchronisationseigenschaften des Systems für verschiedene Parameterbereiche untersuchen.
Im Folgenden nennen wir die Größe $|\nu|_{max}$ "Synchronisierbarkeit". Die Größe $|\nu|_{max}/\epsilon$ wird als "relative Synchronisierbarkeit" bezeichnet. Sie entspricht der Steigung q_{max} in Abb. 3.1 (links) und bestimmt also den Öffnungswinkel der Arnoldzunge.

Synchronisationsbereich, Auswertung: Für den OMO wollen wir also die Größe

$$|\nu|_{max} = 2\epsilon\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\Phi\; F_a(\Phi)\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi}\right| \tag{3.12}$$

konkret ausrechnen. Dazu muss $F_a(\Phi)$ genähert werden:

$$F_a(\Phi) \approx \frac{gB\Omega^2\sin(\Phi)\epsilon\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}gB}{\Omega}\sin\Phi}\sum_k \alpha_k^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\Phi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\left(-\bar{x}-B\cos\Phi+\gamma B\Omega\sin\Phi+g\left(\sum_l \alpha_l\alpha_{l+1}^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi}+c.c.+\sum_l \alpha_l\alpha_l^*\right)\right)^2+(B\Omega^2\sin\Phi)^2}$$

Hier haben wir von dem Term $g\sum_{n,m}\alpha_n\alpha_m^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\Phi}$ aus dem Nenner nur die 0. und 1. Harmonische berücksichtigt. Dies scheint gerechtfertigt, da dieser Term der durch das Licht verursachten Kraft auf den mechanischen Oszillator entsprechen soll. Dass sich hierbei nur der konstante und der an der Eigenfrequenz des Systems oszillierende Anteil auf die mechanische Bewegung auswirken, wurde in Abschnitt 2.2.2 erklärt und in 2.4.3 verifiziert.

Wir werden uns in diesem Abschnitt auf die Auswertung für Parameterbereiche mit kleinem Besselargument (siehe Tabelle 2.1) beschränken. Daher können wir als weitere Näherung alle Seitenbänder höherer Ordnung vernachlässigen, so dass nur noch endliche Summen auszuwerten sind.
Das Integral in Gl.(3.12) wird numerisch ausgewertet. Die Werte für die Parameter des Grenzzyklus $\bar{x}$, B und Ω werden entsprechend den Resultaten aus Abschnitt 2.4 an die jeweils verwendeten Systemparameter Δ, g, γ und κ angepasst.

Ergebnisse: Da die Synchronisierbarkeit proportional zur Kopplung ϵ des Systems an die Triebkraft ist (Gl.(3.12)), liegt der Gedanke nahe, die Synchronisierbarkeit durch ϵ zu bestimmen. Eine wesentliche Voraussetzung der hier verwendeten Methode zur Untersuchung der Synchronisierbarkeit eines Systems war aber, dass die äußere Triebkraft nur schwach an das System koppelt. Dementsprechend halten wir den Kopplungsparameter ϵ für die gesamte Auswertung bei einem kleinen Wert von $\epsilon = 0.1$.
Insgesamt erhalten wir so eine sehr schlechte Synchronisierbarkeit. Für Parametersatz A aus Tabelle 2.1 beispielsweise erhalten wir eine maximale Verstimmung von $|\nu|_{max} = 0.00016$, für die noch Synchronisation eintritt[2]. Wir halten folgende Erklärung dafür, dass die Synchronisierbarkeit so schlecht ist, für möglich: Der OMO hat, wie in vorangegangenen Abschnitten mehrfach erwähnt, die Eigenschaft, „steif“ zu sein. Das bedeutet, dass die Frequenz, an der er in einem Grenzzyklus oszilliert, nur um wenige zehntel Prozent von der vom Licht ungestörten Frequenz Ω_0 abweicht. Diese Steifigkeit lässt nun nur für Triebkräfte, die entsprechend nah an dieser Frequenz oszillieren, eine Synchronisation zu.

Nun also stellt sich die Frage, ob man durch Verändern der Parameter Δ, g und γ die Synchronisierbarkeit verbessern kann[3]. Dazu werden wir, von Parametersatz A ausgehend, nun einzelne Parameter variieren.

Synchronisierbarkeit als Funktion der Verstimmung Δ und γ: In den Abbildungen 3.4 und3.5 erkennt man ein interessantes Phänomen. Die Synchronisierbarkeit $|\nu|_{max}$ wird an den aus den vorherigen Abschnitten bekannten Schwellen zum Zusammenbruch des Grenzzyklus (siehe Tab. 2.1), wo die Amplitude B klein wird, besonders groß. Beim Überschreiten der Schwelle bricht auch die Synchronisierbarkeit zusammen, da ohne eine vorhanden Es gibt also einen gewissen Zusammenhang zwischen Amplitude B und der Synchronisierbarkeit $|\nu|_{max}$. Tatsächlich ist das Produkt aus Amplitude und Synchronisierbarkeit $B \cdot |\nu|_{max}$ bis auf den Schwellenbereich relativ konstant über der optischen Verstimmung Δ, siehe Abb. 3.4. Über der mechanischen Dämpfung γ gilt dies für $B^2 \cdot |\nu|_{max}$. Für beide nimmt die Synchronisierbarkeit mit der Entfernung von der Schwelle ab während die Amplitude B zunimmt.

[2] Wie immer in dieser Arbeit ist diese Frequenz in Einheiten der mechanischen Frequenz Ω_0 ausgedrückt.

[3] Der Parameter κ wird hier wie schon in den vorhergehenden Abschnitten vernachlässigt.

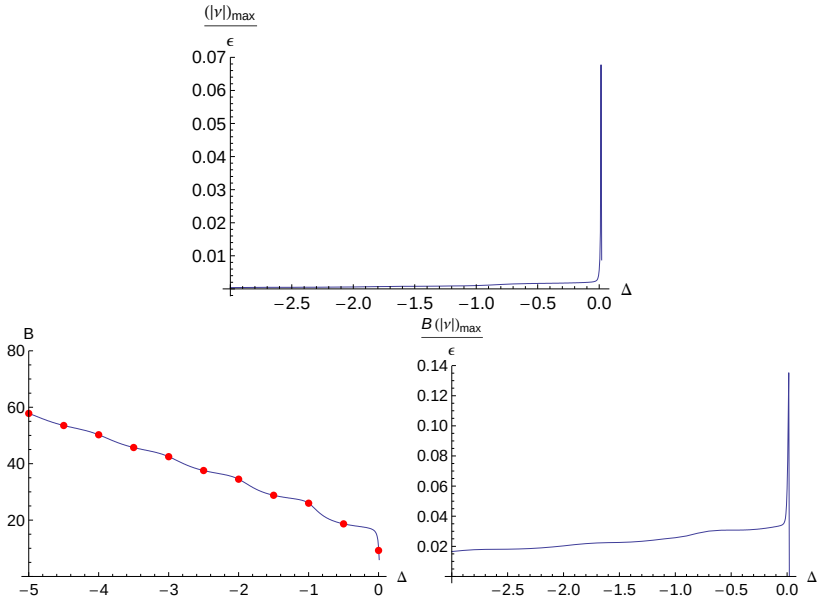

Abbildung 3.4: relative Synchronisierbarkeit $|\nu|_{max}/\epsilon$ als Funktion von Δ oben. Unten links B aus Abschnitt 2.4 und rechts $B \cdot |\nu|_{max}/\epsilon$. Alle anderen Parameter wie in Parametersatz A.

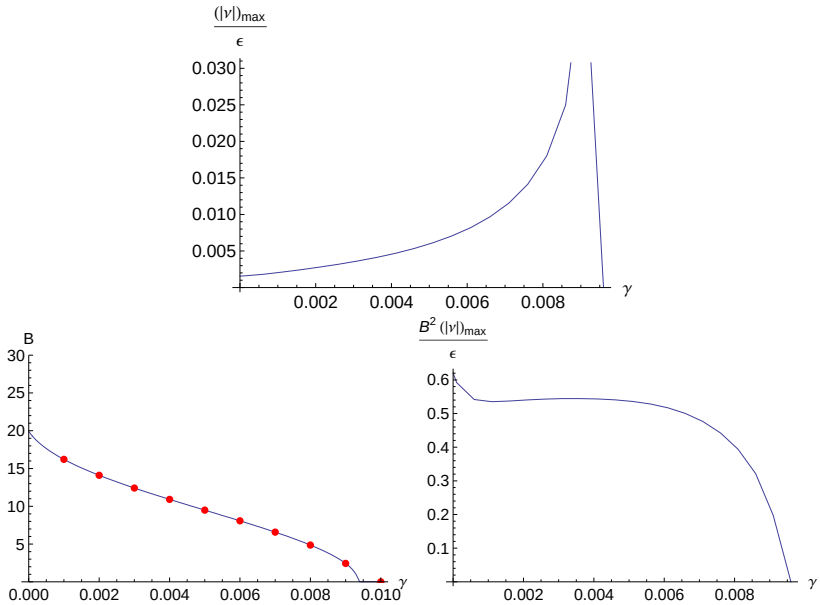

Abbildung 3.5: relative Synchronisierbarkeit $|\nu|_{max}/\epsilon$ als Funktion von γ oben. Unten links B aus Abschnitt 2.4 und rechts $B^2 \cdot |\nu|_{max}/\epsilon$. Alle anderen Parameter wie in Parametersatz A.

Synchronisierbarkeit als Funktion der Kopplung g: Für die Kopplung g liegt der Fall etwas anders. Zwar zeigt sich auch hier (Abb. 3.6) ein ähnliches Verhalten an der Schwelle zum Zusammenbruch des Grenzzyklus: Die Ampli-

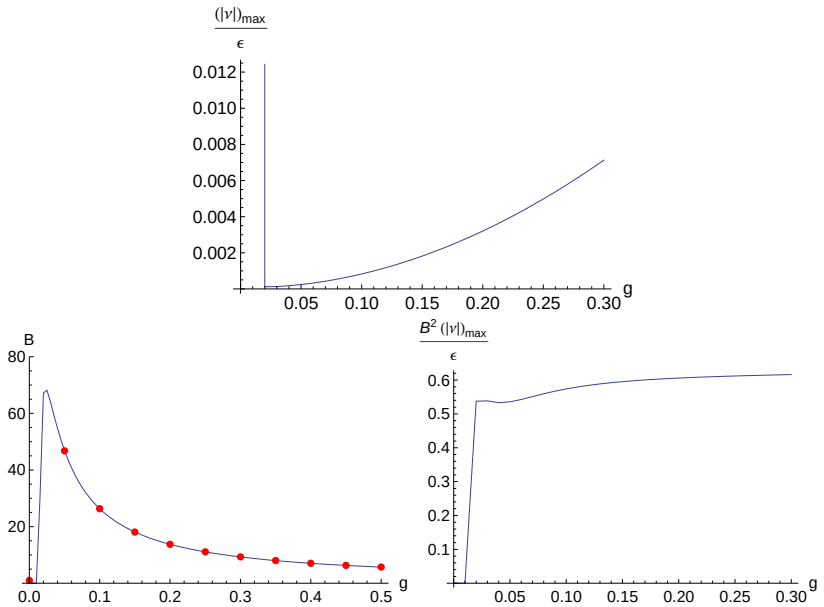

Abbildung 3.6: relative Synchronisierbarkeit $|\nu|_{max}/\epsilon$ als Funktion von g oben. Unten links B aus Abschnitt 2.4 und rechts $B^2 \cdot |\nu|_{max}/\epsilon$. Alle anderen Parameter wie in Parametersatz A.

tude B steigt mit der Entfernung zur Schwelle an und entsprechend sinkt nach einem ersten Maximum die Synchronisierbarkeit auch wieder ab. Aber bedingt dadurch, dass (bei adiabatischer Anpassung von g) die Amplitude B mit der weiteren Entfernung von der Schwelle schnell wieder abnimmt, steigt auch die Synchronisierbarkeit.
Obwohl wir durchaus die Synchronisierbarkeit durch Erhöhung von g verbessern können, ist der Verbesserung Grenzen gesetzt. Denn wenn g beliebig vergrößert wird, so wird das Systemverhalten irgendwann chaotisch.
Wo dieser Punkt liegt, wurde in dieser Diplomarbeit nicht untersucht. Siehe dazu aber [2]. Prinzipiell können aber auch gewisse chaotische Systeme synchronisieren. Die Theorie zu diesem Thema findet sich in [11].

Phasendiagramm: Es gibt Bereiche im Phasenraum der Parameter Δ, g und γ, in denen das System nicht synchronisieren kann. Zunächst scheint es, als ob dieser Bereich mit dem, in dem gar kein Grenzzyklus existiert, übereinstimmen könnte.
Wir visualisieren die Synchronisierbarkeit in einem Phasendiagramm in Abb. 3.7. Dazu wird untersucht, für welche Parameterbereiche $|\nu|_{max} > 0$ gilt. Dabei stellt sich wie für das Phasendiagramm für die Anzahl an Grenzzyklen (Abb. 2.5) heraus, dass die Plots von γ/g_A^2 und γ_A/g^2 über der optischen Verstimmung (hier zumindest grob) deckungsgleich sind. Dies leitet uns zu der Annahme, dass in der Tat nur das Verhältnis γ/g^2 die fragliche Eigenschaft bestimmt.
Zur Erstellung des Phasendiagramms wurden Plots für die Synchronisierbarkeit wie in 3.5 und 3.6 für verschiedene Δ erstellt. Dann wurden die Grenzen, an

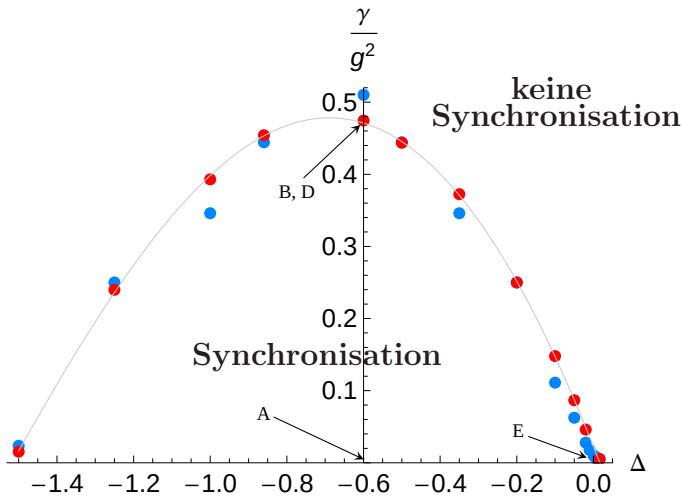

Abbildung 3.7: Phasendiagramm für die Synchronisierbarkeit mit $|\nu|_{max} > 0$. Rote und blaue Punkte stammen jeweils aus den Schnitten $\frac{\gamma}{g_A^2}$ und $\frac{\gamma_A}{g^2}$. Zu jedem Punkt am Phasenübergang gehört ein $B \cdot |\nu|_{max}$, siehe Abb.3.8.

denen die Synchronisierbarkeit zusammenbricht, einzeln abgelesen.

Wie gut die Synchronisierbarkeit an den Grenzen zu ihrem Zusammenbruch ist, wird gesondert untersucht: Die Darstellungen der Synchronisierbarkeit in Abb. 3.8 sind eine Abwandlung von Abb. 3.4. Hier sind g und γ so angepasst, dass $B \cdot |\nu|_{max}$ maximiert wird. Wir bewegen uns also an der Phasengrenze zwischen Bereichen mit Synchronisation und ohne Synchronisation. Entsprechend gehören die eingetragenen Werte zu denen im Phasendiagramm 3.7.

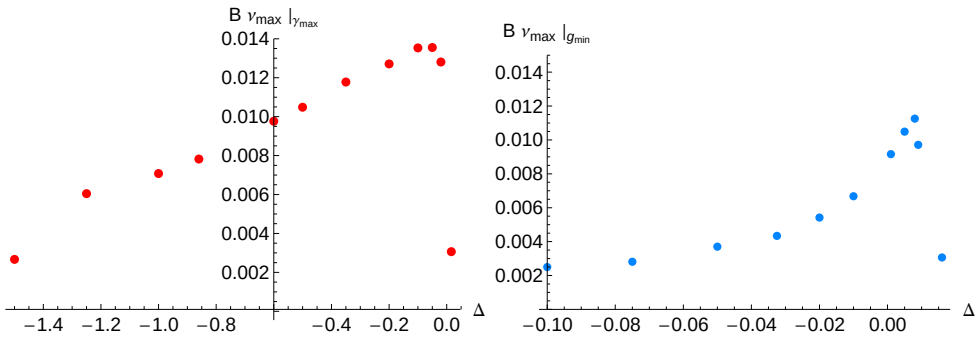

Abbildung 3.8: $B \cdot |\nu|_{max}$ als Funktion von Delta. Parametersatz A, aber: Links: γ angepasst an Synchronisationsschwelle $\gamma_{max}(\Delta)$. Rechts: g angepasst an Synchronisationsschwelle $g_{min}(\Delta)$.

Tatsächlich ist der erste Eindruck, dass der Bereich, in dem das System synchronisieren kann, genau der ist, in dem auch mindestens ein Grenzzyklus

erreicht wird. Dazu vergleichen wir das Phasendiagramm für die Anzahl an Grenzzyklen aus Abb. 2.5 mit dem für die Synchronisierbarkeit in Abb. 3.7. In Abb. 3.9 überlagern wir beide.
Es stellt sich jedoch heraus, dass es auch einen Bereich gibt, in dem zwar noch ein Grenzzyklus existiert, aber trotzdem keine Synchronisierbarkeit gegeben ist. Möglicherweise darf ein Betrag der Verstimmung im Bereich der Anregung $|\Delta| > 1.3$ nicht überschritten werden, weil dann die Wechselwirkung zwischen optischer und mechanischer Komponente so gering wird, dass folgende Situation eintritt: Obwohl sie Wechselwirkung noch ausreicht, um eine parametrische Anregung und somit einen Grenzzyklus zu erzeugen, wird eine kleine Störung in der optischen Komponente durch eine äußere Triebkraft nicht mehr ausreichend übertragen, so dass sie keine Auswirkung mehr auf die mechanische Komponente hat. Somit ist dann keine Synchronisation mehr möglich.

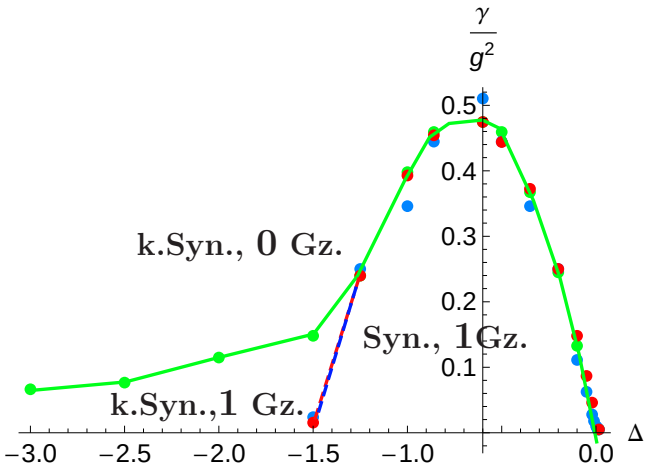

Abbildung 3.9: Im Bereich $\Delta < -1.3$ gibt es ein Gebiet im Phasenraum, das trotz Grenzzyklus nicht synchronisierbar ist.

IV
Synchronisation und Rauschen

4.1 Theorie zum Rauschen

4.1.1 Heisenberg-Langevin Formalismus

Es gibt in der realen Welt keine abgeschlossenen Systeme, und somit keinen physikalischen Prozess ohne Verluste. Um eine Quantentheorie der Dämpfung zu entwickeln, bieten sich mehrere Möglichkeiten an. Typisch ist es in jedem Fall, ein an das System gekoppeltes Wärmebad oder Reservoir zu betrachten.
Als erste Möglichkeit kann eine Mastergleichung für den Dichteoperator des Systems abgeleitet werden, aus der dann direkt die Bewegungsgleichungen der Erwartungswerte beliebiger Systemoperatoren folgen (z.B. $\langle\dot{\xi}\rangle(t) = -\gamma\langle\xi\rangle(t)$).
Zweitens sind für den Fall, dass in der gegebenen Problemstellung nur bestimmte Momente interessieren, die Quanten-Langevin-Gleichungen zu bevorzugen. Sie sind in der Regel weniger kompliziert abzuleiten und liefern Bewegungsgleichungen für die Operatoren selbst, von der Form

$$\dot{\xi}(t) = -\gamma\,\xi(t) + \Gamma(t)$$

mit einem Dämpfungsterm γ und einem Quanten-Rausch-Operator $\Gamma(t)$, genannt Langevinkraft. Die Ergebnisse der beiden Formalismen decken sich, da $\Gamma(t)$ ein fluktuierender Term mit verschwindendem Mittel ist.
Beim Heisenberg-Langevin-Formalismus garantiert der Langevinterm $\Gamma(t)$ durch Konstruktion, dass die Kommutatorrelationen auch unter der Zeitentwicklung gültig bleiben. Im Mastergleichungs-Formalismus erfüllt diese Funktion das Fluktuations-Dissipationstheorem, siehe zum Beispiel [15]. Da nun neben der Dissipation auch Fluktuationen berücksichtigt werden, kann hier - im Gegensatz zum Kapitel 2 - auch mit voller Berechtigung von quantenmechanischen Operatoren gesprochen werden. So kann auch wieder das Photonenbild verwendet werden.

Im Folgenden soll die Ableitung der Quanten-Langevin-Gleichungen für den Operator der Lichtmode a bzw. $a^\dagger$, und für die mechanischen Operatoren x und p aus dem vollständigen (also die Bäder einschließenden) Hamiltonoperator unseres Systems nach der üblichen, in [19], [3] u.v.a. beschriebenen Methode skizziert werden. In Abb. 4.1 ist eine Schema für eine Systemrealisierung à la Vitali zusammen mit den relevanten Reservoirs gegeben.

Der vollständige Hamiltonoperator setzt sich aus drei Teilen zusammen:

$$H = H_{\text{Licht}} + H_{\text{mech}} + H_{\text{ww}}.$$

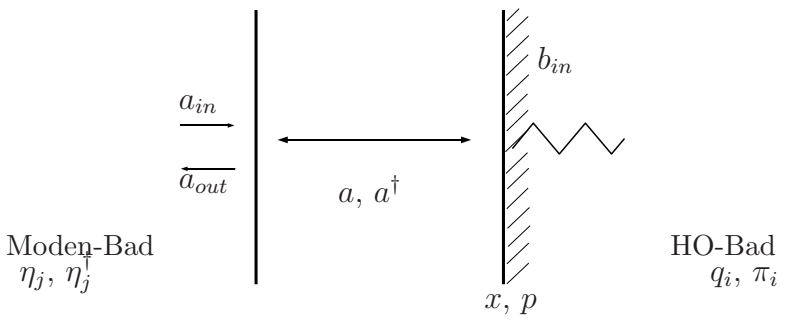

Abbildung 4.1: Schematische Darstellung des Systems mit den interessierenden Operatoren und den Bad-Operatoren.

Dabei wird das Licht im System durch

$$H_{\text{Licht}} = \underbrace{\hbar\omega_c a^\dagger a}_{H_{\text{cav}}} + \underbrace{\mathrm{i}\hbar E\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_l t}a^\dagger - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_l t}a\right)}_{H_{\text{pump}}} + \underbrace{\hbar\sum_j \omega_j\ \eta_j^\dagger\eta_j}_{H_{\text{mod.bad}}} + \underbrace{\hbar\sum_j (k_j a^\dagger\eta_j - k_j^* a\eta_j^\dagger)}_{H_{\text{cav.bad.ww in RWA}}},$$

der mechanische Teil durch

$$H_{\text{mech}} = \underbrace{\frac{\hbar\,\Omega_0}{2}\left(p^2 + x^2\right)}_{H_{\text{mech}}} + \underbrace{\sum_i \frac{\Omega_i^2 q_i^2}{2} + \frac{\pi_i^2}{2}}_{H_{\text{mech.bad}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i \left\{(\pi_i - K_i x)^2\right\} + \Omega_i^2 q_i^2}_{H_{\text{mech.bad.ww}}}$$

und die Kopplung zwischen diesen beiden durch

$$H_{\text{ww}} = -\hbar\,\widetilde{G}\,x\,a^\dagger a$$

beschrieben.

Dieser Hamiltonoperator ist zum Teil schon aus Abschnitt 2.1 bekannt. Neu hinzugekommen sind Terme, die die Bäder und die Kopplung des Systems an diese Bäder beschreiben.
Für das optische Rauschen beschreibt $H_{\text{mod.bad}}$ das Modenbad außerhalb des Hohlraumes und $H_{\text{cav.bad.ww}}$ die Wechselwirkung zwischen der Mode a im Hohlraum und dem Modenbad. Dabei ist k die entsprechende Kopplungskonstante. Für diese Wechselwirkung kann die übliche Drehwellennäherung (**R**otating **W**ave **A**pproximation) benutzt werden.
Die Dissipation der Bewegungsenergie geht in das durch $H_{\text{mech.bad}}$ beschriebene Reservoir. $H_{\text{mech.bad.ww}}$ beschreibt die Wechselwirkung zwischen mechanischem Oszillator und einem Wärmebad aus harmonischen Oszillatoren, siehe auch [9].

Wir wollen nun skizzieren, wie die Quanten-Langevin-Gleichung für den Modenoperator a abgeleitet wird. Die Zeitentwicklung von a ergibt sich aus der

Heisenberggleichung

$$\begin{aligned}\dot{a}(t) &= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,[a,H] \\ &= -\mathrm{i}\omega_c a(t) - \mathrm{i}\sum_j k_j\eta_j(t) + \mathrm{i}\widetilde{G}x(t)a(t) + E\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_l t}\,. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Die Bewegungsgleichung für die Operatoren des Modenbads

$$\dot{\eta}_j(t) = -\mathrm{i}\omega_j\eta_j(t) - \mathrm{i}k_j^* a(t)$$

kann nun formal integriert werden und so η_j in Gl.(4.1) eliminiert werden. In einem an ω_l rotierenden Bezugssystem ($a(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_l t} \longrightarrow a(t)$) ergibt sich dann die Quanten-Langevingleichung

$$\dot{a}(t) = -\mathrm{i}\underbrace{(\omega_c - \omega_l)}_{=:\Delta}a(t) - \kappa\, a(t) + \mathrm{i}\widetilde{G}x(t)a(t) + E + \sqrt{2\kappa}\; a_{in}(t)$$

wobei der Langevinterm a_{in} definiert ist durch:

$$a_{in}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_j-\omega_l)t}\eta_j|_{t=t_0}$$

mit $\kappa = \pi\,|k|^2$ als optische Verlusrate.
Dabei ist die wichtige Annahme gemacht worden, dass die Kopplung an das Modenbad k unabhängig von der Frequenz sei. Dies entspricht einer Markov-Näherung. Beachte dazu beispielsweise die Erklärungen in [3].
Somit ist der bisher nur phänomenologisch eingeführte Dämpfungsterm $-\kappa a(t)$ hergeleitet worden. Außerdem ist ein stochastischer Eingangsterm $a_{in}(t)$ definiert worden, der die Rauscheinflüsse der Umgebung beschreibt [1]. Er erfüllt die Kommutatorrelation

$$\left[a_{in}(t), a_{in}^\dagger(t')\right] = \delta(t-t').$$

$a_{in}(t)$ hat ein veschwindendes Mittel und kann auch als stochastische Langevinkraft bezeichnet werden.
Für ein thermisches Modenbad gelten außerdem folgende Korrelationsfunktionen:

$$\begin{aligned}\langle a_{in}^\dagger(t)\, a_{in}(t')\rangle &= \langle n\rangle\;\delta(t-t') \\ \langle a_{in}(t)\, a_{in}^\dagger(t')\rangle &= (1+\langle n\rangle)\;\delta(t-t').\end{aligned}$$

Hier ist also die Operatorordnung wichtig. Falls man annimmt, dass das Rauschen aus den Vakuumfluktuationen stammt, ist $\langle n\rangle \approx 0$, und somit tragen nur die antinormal geordneten Terme bei.

[1] Die zeitlichen Randbedingungen der formalen Integration von $\dot{\eta}_j(t)$ legen fest, ob sich ein Eingangsterm a_{in}, der das Geschehen außerhalb des Hohlraumes über die „Vergangenheit" in Bezug auf t integriert, oder ein Ausgangsterm a_{out}, der die „Zukunft" berücksichtigt, ergibt. In [19] wird ein Eingangs - Ausgangs Formalismus entwickelt, und gezeigt, dass $a_{out}(t)+a_{in}(t) = \sqrt{\kappa}\; a(t)$ gilt

In ähnlicher Weise erhält man auch die Quanten-Langevin-Gleichung für x und p, bzw.

$$\ddot{x} = -\Omega_0^2 x - \gamma \dot{x} + \Omega_0 \widetilde{G} a^\dagger a + \beta \, b_{in}(t)$$

mit γ als mechanischer Verlustrate (Reibungskoeffizient) und b_{in} als hermiteschem Rauschterm mit verschwindendem Mittel ($\langle b_{in}(t) \rangle = 0$). β ist die zu $\sqrt{2\gamma}$ proportionale Rauschamplitude.
Wegen $\hbar\Omega_0 \ll k_B T$ in den typischen Realisierungen unseres Systems befinden wir uns in einem Hochtemperaturlimes. Daher lautet die Korrelationsfunktion für den hermiteschen Operator b_{in}

$$\langle b_{in}(t) \, b_{in}(t') \rangle \quad = \quad k_B T \, \delta(t - t') \; ,$$

und der mechanische Oszillator kann als klassischer verstanden werden. Für tiefe Temperaturen müssten andere Korrelationsfunktionen verwendet werden, siehe etwa [18].
Diese Methode der Herleitung der Langevingleichungen ist durchaus legitim, obwohl es zunächt so scheint, als ob es zu Schwierigkeiten kommen könnte, weil es sich um ein nichtlineares System handelt. Aber genau genommen werden die Langevingleichungen für die Systemoperatoren x und a separat aufgestellt. Jede Bewegungsgleichung für sich ist linear, und erst durch ihre Kopplung kommt eine Nichtlinearität ins Spiel.

Ein typisches Vorgehen ist es im Weiteren, die so erhaltenen Quanten-Langevin-Gleichungen zu linearisieren. Dies wird hier im Abschnitt (4.2.4) bei der Quantifizierung der verschiedenen Rauscheinflüsse angewandt werden.

4.1.2 Von Langevin- zu Fokker-Planck-Gleichungen

Ein so motiviertes System aus N Quanten-Langevin-Gleichungen lautet in allgemeiner Form

$$\dot{\xi}_i = \underbrace{h_i(\{\xi\}\,, t)}_{\text{det. Teil}} + \underbrace{g_{ij}(\{\xi\}\,, t) \, \Gamma_j(t)}_{\text{stochast. Teil}} \; . \tag{4.2}$$

Bei den ξ_i handelt es sich somit um stochastische Variablen. In solch allgemeinen Langevin-Gleichungen treten sowohl ein deterministischer Anteil als auch ein stochastischer Anteil auf, der einen Rauschterm $\Gamma_j(t)$ enthält. Die Eigenschaften des stochastischen Anteils ergeben sich aus den Eigenschaften der die Dissipation verursachenden Bäder.

Ein solches System stochastischer Differenzialgleichungen ist nun natürlich nicht exakt lösbar, da nur statistische Information vorhanden ist. Vielmehr wird die Wahrscheinlichkeitsdichte[2] $W(\{x\}\,, t)$ im N-dimensionalen Phasenraum gesucht.

[2] Wie auch in [12] wird hier in der Notation unterschieden zwischen der stochastischen Variable ξ und der entsprechenden Variable x in der Verteilungsfunktion.

Für einen Markov-Prozess mit δ-korreliertem Gaussschem Rauschen [3] erfüllt sie die partielle Differenzialgleichung

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W_\xi(\{x\},t)}{\mathrm{d}t} &= -\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_i^{(1)}(\{x\})W_\xi(\{x\},t)\right)\\ &\quad+\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j}\left(D_{ij}^{(2)}(\{x\})W_\xi(\{x\},t)\right)\ . \end{aligned}\tag{4.3}$$

Dabei handelt es sich um eine Fokker-Planck-Gleichung mit Driftkoeffizient $D_i^{(1)}$ und Diffusionskoeffizient $D_{ij}^{(2)}$.
Hierbei ist bereits ein Spezialfall berücksichtigt. Im Allgemeinen gibt es auch Terme und somit Koeffizienten höherer Ordnung (Kramer-Moyal-Koeffizienten, siehe [12]). Aber für δ-korreliertes Gausssches Rauschen verschwinden alle Koeffizienten mit $n > 2$, so dass eine Gleichung 2. Ordnung wie (4.3) übrig bleibt.

Die Koeffizienten $D_i^{(1)}$ und $D_{ij}^{(2)}$ ergeben sich nach Risken [12], aus den stochastischen Variablen ξ_i und deren statistischen Eigenschaften:

$$D_i^{(1)}(\{x\},t) = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\langle\xi_i(t+\tau)-x_i\rangle\,|_{\xi_k(t)=x_k} \qquad k=1,2,...,N \tag{4.4}$$

$$D_{ij}^{(2)}(\{x\},t) = \frac{1}{2}\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\langle[\xi_i(t+\tau)-x_i]\,[\xi_j(t+\tau)-x_j]\rangle\,|_{\xi_k(t)=x_k} \tag{4.5}$$

Dabei ist $\xi(t+\tau)$ für $\tau > 0$ Lösung von (4.2) mit dem scharfen Wert $\xi(t) = x$ zur Zeit t.

Es ergibt sich gemäß der Stratonovich-Regel[4] (siehe [16], [17]) mit dieser Korrelationsfunktion für das Gausssche Rauschen

$$\langle\Gamma_i(t)\Gamma_j(t')\rangle = 2\sigma_{ij}^2\delta(t-t') \tag{4.6}$$

ein Driftkoeffizient

$$D_i^{(1)}(\{x\},t) = \underbrace{h_i(\{x\},t)}_{\text{deterministische Drift}} + \sigma_{jl}^2\underbrace{\frac{\partial\, g_{kj}(\{x\},t)}{\partial x_k}g_{il}(\{x\},t)}_{\text{rauschinduzierte Drift}} \tag{4.7}$$

[3] Beim Gaussschen Rauschen wird die Varianz σ^2 als Rausch-Intensität bezeichnet. Die Rauschamplituden sind normalverteilt, und die zeitlichen Kumulanten k (sie heißen bei Stratonovich [16] Korrelationsfunktionen) von Ordnung 3 und höher verschwinden. Das heißt also, dass alle Momente m der Ordnung 3 und höher durch das erste und zweite Moment ausgedrückt werden können , $k_1 = m_1 = \langle\xi\rangle$, $k_2 = m_2 = \langle\xi^2\rangle - \langle\xi\rangle^2$. Es gilt

$$\begin{aligned} k_2(\tau) &= \langle x(t)x(t+\tau)\rangle - \langle x(t)\rangle\langle x(\tau)\rangle\\ &= \sigma^2 R(\tau)\\ \text{Standardabweichung}:\ \sigma &= \sqrt{k_2(0)}\end{aligned}$$

Die Rauschintensität hat über die zeitliche Korrelation einen direkten Einfluss auf Drift und die Diffusion der Verteilungsdichte der Systemvariablen Gl. (4.4), (4.5). $R(\tau)$ ist allgemein einfach die normierte ($\int_{-\infty}^{\infty} d\tau R(\tau) = 1$) Korrelationsfunktion. Hier ist $R(\tau)$ eine Deltafunktion, da es sich um weißes Rauschen handelt. Also erhält man eine gleichverteilte spektrale Dichte $S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int d\tau k(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}$.

[4] kein Ito-Calculus, sonst gäbe es keinen rauschinduzierten Driftterm, siehe [12]

und ein Diffusionskoeffizient

$$D_{ij}^{(2)}(\{x\}, t) = \sigma_{kl}^2 \, g_{ik}(\{x\}, t) g_{jl}(\{x\}, t) \, , \tag{4.8}$$

wobei wir die Einsteinsche Summenkonvention verwenden.

4.1.3 Synchronisation mit Rauschen

Hier wollen wir die Grundlagen der Theorie der Synchronisation mit Rauschen erklären. Die Inhalte beruhen zu großen Teilen auf den Büchern von Pikovsky et al. [11] und Stratonovich [17].
Gehen wir zunächst von einer einfachen Langevin-Gleichung für die Phasendifferenz aus Abschnitt 3.1 aus:

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\nu + \epsilon q\,(\Psi) + \Gamma(t) \tag{4.9}$$

mit einem einfachen additiven Rauschterm $\Gamma(t)$. Analog zu der Überlegung in Abschnitt 3.1 kann auch mit Rauschen die Dynamik von Ψ in einem Potenzial $V(\Psi)$ mit

$$-\nu + \epsilon q(\Psi) = -\frac{dV}{d\Psi}$$

betrachtet werden. Diesmal allerdings ist die Dynamik nicht allein vom Potenzial bestimmt, vielmehr vollführt das Ψ-Teilchen in diesem Potenzial eine Zufallsbewegung.
Wenn man Rauschen hinzunimmt, gibt es einen Parameter mehr, nämlich die Rauschamplitude σ, die zusätzlich über die Synchronisationseigenschaften eines Systems bestimmt. Dies soll an einem Beispiel klar gemacht werden.

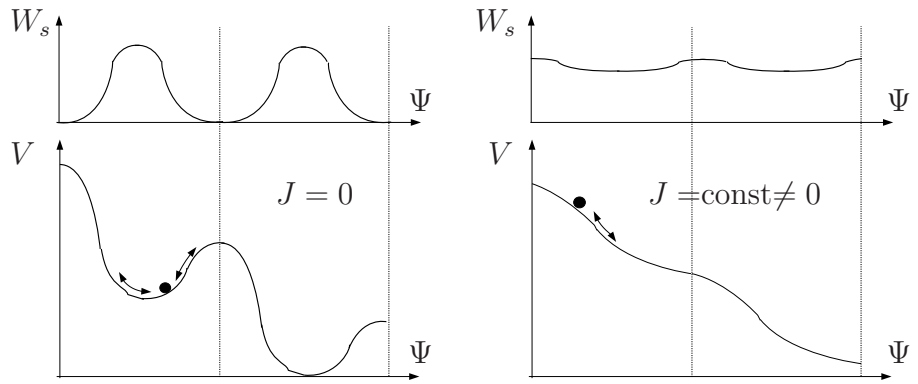

Abbildung 4.2: Potenzial $V(\Psi)$ und stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte $W_s(\Psi)$. Rechts gibt es keine Synchronisation. Links läge ohne Rauschen auf jeden Fall Synchronisation vor ($J = 0$). Mit Rauschen aber kann das Teilchen die Barriere durch seine stochastische Bewegung überwinden.

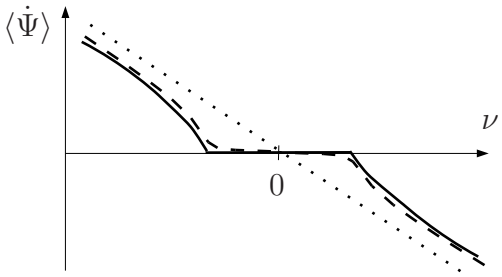

Abbildung 4.3: Synchronisationsplateau im rauschfreien Fall (durchgezogene Linie) und im Fall seltener Phasensprünge (gestrichelte Linie). Die gepunktete Linie deutet einen Fall häufiger Phasensprünge (also starken Rauschens) an, für den dann nicht mehr von Synchronisation gesprochen werden kann.

Stellen wir uns ein Teilchen im Potenzial wie in Abb. (4.2) links vor. Wenn das System begrenztem Rauschen (= Rauschen mit einem Abschnitt bei der Rauschamplitude) ausgesetzt ist, so kann es - bei genügend kleinem Abschnitt - sein, dass die Synchronisation trotzdem erhalten bleibt, weil das in seinem lokalen Minimum zappelnde Teilchen die Barriere nicht überwinden kann.
Ist der Cutoff jedoch zu groß, oder gar unendlich groß (= unbegrenztes Rauschen, z.B. gausssches Rauschen), dann wird mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit von Zeit zu Zeit das Teilchen die Barriere überwinden, und schnell in den Bereich des nächsten Minimums gehen, wo es wieder ein Weilchen hin und her zappelt. Dies wird Phasensprung genannt. Dabei sind Phasensprünge in unserem Beispiel wegen des Vorzeichens von ν nach rechts wahrscheinlicher als nach links, da dort die Potenzialbarriere kleiner ist.
Wenn solche Phasensprünge auch nur selten passieren, dann kann genau genommen trotzdem nicht mehr von Synchronisation gesprochen werden. Wir werden jedoch gleich sehen, dass bei seltenen Phasensprüngen mit dem Wahrscheinlichkeitsstrom J ein Kriterium für Synchronisation gefunden werden kann, das dann „so gut wie“ erfüllt ist, so dass die Verwendung des Begriffs Synchronisation doch gerechtfertigt bleibt (Abb. 4.3).

Wahrscheinlichkeitsdichte $W(\Psi)$ und Wahrscheinlichkeitsstrom J :
Eine Fokker-Planck-Gleichung (4.3) kann auch als Kontinuitätsgleichung mit dem Wahrscheinlichkeitsstrom J geschrieben werden. Aus

$$\frac{\partial W(\Psi,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \Psi}\left(D^{(1)}(\Psi,t)W(\Psi,t)\right) + \frac{\partial^2}{\partial \Psi^2}\left(D^{(2)}(\Psi,t)W(\Psi,t)\right)$$

wird

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial \Psi} = 0 \tag{4.10}$$

mit dem Wahrscheinlichkeitsstrom [5]

$$\begin{aligned} J(\Psi,t) &= D^{(1)}(\Psi,t)W(\Psi,t) - \frac{\partial}{\partial\Psi}\left(D^{(2)}(\Psi,t)W(\Psi,t)\right) \qquad (4.11) \\ &= \frac{\langle\dot{\Psi}\rangle}{2\pi} \,. \end{aligned}$$

Aus der Kontinuitätsgleichung (4.10) folgt nun sofort, dass bei stationärer Wahrscheinlichkeitsverteilung der entsprechende Strom konstant sein muss:

$$\frac{\partial}{\partial t}W = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial\Psi}J = 0 \qquad \text{bzw.} \quad \mathrm{J}(\Psi) = \text{konst.}$$

Wie sehen die Wahrscheinlichkeitsdichte und der Wahrscheinlichkeitsstrom nun in unserem Beispiel aus? Betrachte dazu wieder die Abbildung 4.2. Links ist der Fall von Synchronisation dargestellt. Diese ist dadurch charakterisiert, dass das Intervall im 2π-periodischen Potenzial so gewählt werden kann, dass der Wahrscheinlichkeitsstrom J auf dem Rand verschwindet. Somit verschwindet auch die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte $W_s(\Psi)$ auf dem Rand. Wenn der Strom auf dem Rand verschwindet, dann auch im gesamten Intervall, denn er muss bei einem stationären Prozess konstant über Ψ sein.

Rechts in Abb. 4.2 ist auch ein stationärer Fall dargestellt, aber eben der ohne Synchronisation. W_s ist annähernd gleichverteilt. Da W wieder stationär ist, ist der Wahrscheinlichkeitsstrom J auch hier konstant. Aber eben nicht null, denn W_s verschwindet hier nicht auf dem Rand, ebenso wenig wie J. Trotzdem ist die Normierbarkeit von $W_s(\Psi)$ gewährleistet, weil Ψ periodisch auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ definiert ist. Bei natürlichen Randbedingungen dagegen müsste die Wahrscheinlichkeitsdichte auf den im unendlichen liegenden Rändern verschwinden. Dann wäre auch J am Rand und wegen seiner Konstanz über Ψ überall null. Somit ergibt sich ein entscheidender Unterschied durch die periodische Definition auf dem Intervall: Es gibt, obwohl es sich um einen stationären Fall handelt, einen Wahrscheinlichkeitsstrom $J \neq 0$. Diese Situation kann man als Fließgleichgewicht für W bezeichnen.

Betrachten wir nun wieder Abb. 4.2, links, und zwar mit der Vorstellung, dass die Rauschamplitude σ so groß ist, dass Phasensprünge stattfinden können. Dann kann das Intervall so gewählt werden, dass J auf dem Rand „so gut wie“ verschwindet. Da die Wahrscheinlichkeitsdichte auch hier konstant ist, ist J natürlich dann auch im gesamten Intervall entsprechend klein.
Somit ist ein Kriterium für Synchronisation bei ungebundenem Rauschen gefunden. Die Funktion $J(\nu)$ (siehe Abb. 4.3) bildet im rauschfreien Fall ein exaktes Synchronisationsplateau. Für eine kleine Rauschamplitude, so dass Phasensprünge selten sind, nähert sich die Funktion $J(\nu)$ diesem Plateau stark an.

[5] Aus der Langevin-Gleichung (4.9) und unter Verwendung von (4.11) erhält man wegen $\langle\xi(t)\rangle = 0$

$$\langle\dot{\Psi}\rangle = \langle -\nu + \epsilon q(\Psi)\rangle = \int_0^{2\pi} D^{(1)}W_s(\Psi)d\Psi = \int_0^{2\pi}\left(J + \sigma T\frac{\partial}{\partial\Psi}W_s\right)d\Psi = 2\pi\ J\ ,$$

da W_s nach Definition 2π-periodisch ist.

4.1.4 Analyse eines Beispielsystems

Hier soll eine Bedingung für Synchronisation für ein Beispielsystem formuliert werden. Drift- und Diffusionskoeffizient seien durch

$$D^{(1)} = \epsilon \sin(\Psi) - \nu \qquad\qquad D^{(2)} = \sigma\, T$$

gegeben. Für solch eine rein deterministische Drift $D^{(1)}$ kann ein Potenzial geschrieben werden

$$V(\Psi) = \epsilon \cos(\Psi) + \nu\Psi \ ,$$

das ein Minimum bei $\Psi = 0$ hat. Der Driftkoeffizient ist zeitunabhängig, der Diffusionskoeffizient sogar konstant über Ψ. Qualitativ kann man sich also vorstellen (siehe beispielsweise Abbildung 3.2), wie, je nachdem wie ν und ϵ zusammenspielen, abhängig von der Rauschstärke $\sigma\ T$ das Teilchen aus seiner Potenzialmulde bei $\Psi = 0$ ausbrechen kann.
Wir suchen also die Funktion $J(\nu)$ um die Synchronisationseigenschaften zu untersuchen. Zunächst bestimmen wir den Fluss nach Gl.(4.11)

$$J(\nu) = D^{(1)} W_s - \frac{\partial}{\partial\Psi}\left(D^{(2)} W_s\right) = (\epsilon \sin\Psi - \nu)\, W_s - \sigma\, T \frac{\partial}{\partial\Psi} W_s \ . \tag{4.12}$$

In diesem Ausdruck steht bereits die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte W_s, da wir uns ja für den Fluss im stationären Fall interessieren.
Wir kennen aus [11] und [17] zwei Methoden, an das gewünschte Ergebnis $J(\nu)$ heranzukommen. Diese Methoden sollen nun an diesem Beispielsystem demonstriert werden.

Methode 1: Für die stationäre Lösung W_s wird zunächst ein Fourier-Reihen-Ansatz gemacht:

$$W_s = \sum_{-\infty}^{\infty} W_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Psi} \tag{4.13}$$

Dieser ergibt eingesetzt in Gl.(4.12) dann

$$J = \sum_n W_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Psi} (\epsilon \sin\Psi - \nu) - \sigma T \sum_n \mathrm{i}n W_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Psi} \tag{4.14}$$

und wegen $\epsilon W_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Psi} \sin\Psi = \frac{\epsilon}{2\mathrm{i}} W_n \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\Psi} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\Psi}\right)$ und weil $J = const$ nach Annahme, ergibt sich

$$\delta_{n,0} J = -W_n\left(\nu + \mathrm{i}n\sigma T\right) + \frac{\epsilon}{2\mathrm{i}}\left(W_{n-1} - W_{n+1}\right) \tag{4.15}$$

Wegen der Normierung $\int_0^{2\pi} W_s(\Psi) d\Psi = 1$ ist $W_0 = \frac{1}{2\pi}$ und weil W reell ist, gilt $W_{-n} = W_n^*$. Dies liefert bei $n = 0$ folgende Beziehung für den Fluss J und die erste Harmonische W_1:

$$J = -\frac{\nu}{2\pi} - \epsilon\ \mathrm{Im}\ \left(W_1\right). \tag{4.16}$$

W_1 wiederum kann aus

$$W_n = W_{n-1}\left(\frac{1}{(\nu + \mathrm{i}n\sigma T)\,\frac{2\mathrm{i}}{\epsilon} + \frac{W_{n+1}}{W_n}}\right) \qquad \text{für} \quad n > 0 \tag{4.17}$$

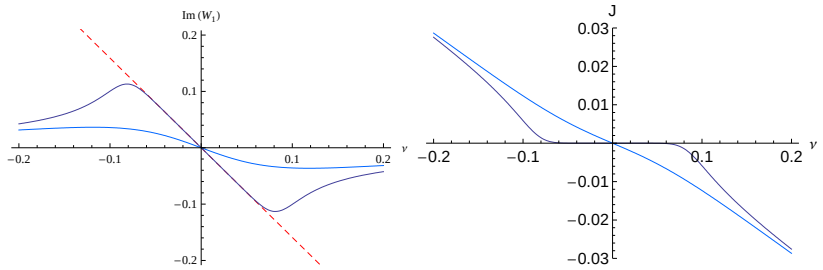

Abbildung 4.4: Links ist Im (W_1) und rechts J über ν dargestellt, jeweils mit verschiedenen Rauschamplituden, nämlich $\sigma T = 0.01$ (schwarz) und $\sigma T = 0.1$ (blau). Die rote Gerade ist ein Graph der Funktion $\frac{-\nu}{2\pi\epsilon}$. Die schwarze Kurve für $\sigma T = 0.01$ schmiegt sich gut an und liefert somit auch einen Strom mit Synchronisationsplateau (siehe Gl.(4.16)).

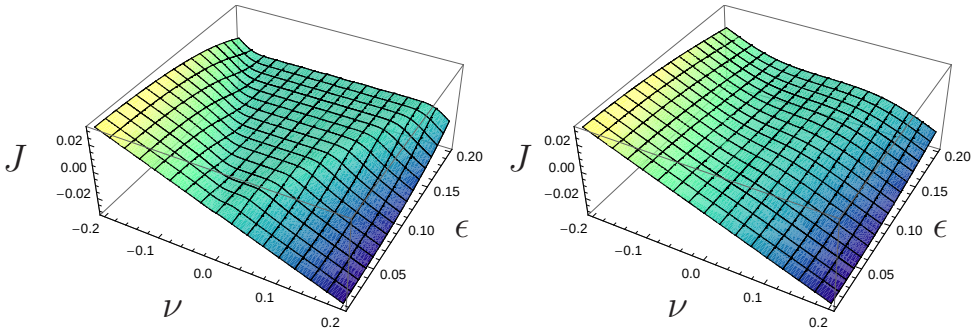

Abbildung 4.5: Die Arnoldzunge aus Methode 1 für eine Rauschamplitude von links $\sigma T = 0.01$ und rechts $\sigma T = 0.07$.

iterativ bestimmt werden zu (Start bei $n = 1$)

$$W_1 = \frac{(2\pi)^{-1}}{(\nu + \mathrm{i}\sigma T)\,\frac{2\mathrm{i}}{\epsilon} + \frac{1}{(\nu+\mathrm{i}2\sigma T)\frac{2\mathrm{i}}{\epsilon} + \frac{1}{(\nu+\mathrm{i}3\sigma T)\frac{2\mathrm{i}}{\epsilon}+(\cdots)}}}. \tag{4.18}$$

Achtung! Dieser Ausdruck konvergiert nur für ein $\sigma T > 0$. Wir müssen n mindestens, bis $n \gg \frac{\epsilon}{2\sigma T}$ gilt, iterieren.
In Abb. 4.4 ist nun Das Ergebnis für Im W_1 und J als Funktion von ν dargestellt, mit $\epsilon = 0.1$ und ausreichenden zehn Iterationen. Alternativ kann man auch über die Parameter ν und ϵ plotten und erhält so eine dreidimensionale Darstellung der Arnoldzunge, siehe Abb. 4.5.

Methode 2: Diese Methode entnehmen wir dem Buch von Stratonovich [17]. Für kleines Rauschen kann eine Methode angewendet werden, die auf der Tatsache beruht, dass in diesem Fall nur selten Phasensprünge auftreten. „Selten“ heißt, dass das Zeitintervall zwischen den einzelnen Sprüngen sehr viel größer ist

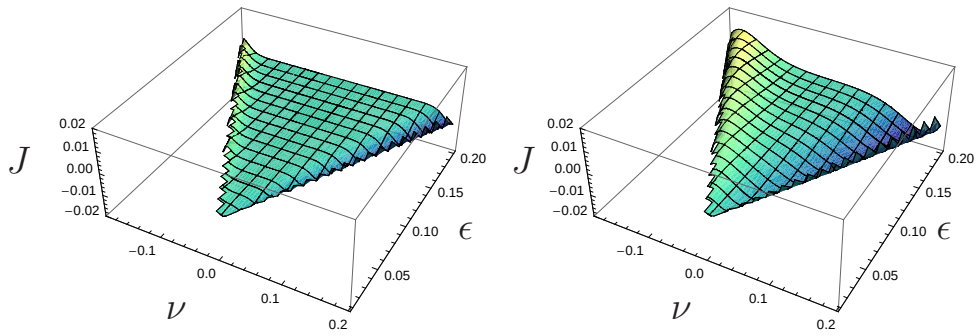

Abbildung 4.6: Die Arnoldzunge aus Methode 2 für eine Rauschamplitude von links: $\sigma\, T = 0.01$ und rechts $\sigma\, T = 0.07$

als die Dauer der einzelnen Sprünge. Man kann also von einem Poisson-Prozess sprechen, da die Dynamik der Phasendifferenz Ψ durch eine Serie unabhängiger $+2\pi$ und -2π Sprünge beschrieben werden kann. In diesem Prozess reicht dann die Sprungrate [6] G_+ bzw. G_- zu seiner Beschreibung aus:

$$\langle \dot{\Psi} \rangle = 2\pi \left(G_+ - G_- \right)$$

Für eine Verstimmung $\nu \neq 0$ sind G_+ und G_- verschieden. Diese Sprungraten können durch

$$\begin{aligned} G_- &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\epsilon^2 - \nu^2}\; \mathrm{e}^{-\frac{\delta U}{\sigma T}} \\ G_+ &= G_-\; \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\nu}{\sigma T}} \end{aligned}$$

ausgedrückt werden. Dabei ist

$$\delta U = 2 \left(\sqrt{\epsilon^2 - \nu^2} - \nu \arccos\left(\frac{\nu}{\epsilon}\right) \right)$$

die Potenzialbarriere, die für jeden Phasensprung überwunden werden muss. Das Rauschen σT steht in einem Boltzmannfaktor $\mathrm{e}^{-\frac{\delta U}{\sigma T}}$ für die thermische Aktivierung des Systems. Damit das Teilchen die Barriere nur schlecht überwinden kann und somit Phasensprünge selten sind, muss gelten $\delta U \gg \sigma T$. Es ergibt sich für den Strom J:

$$\begin{aligned} J &= G_+ - G_- \\ &= G_+ \left(\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\nu}{\sigma T}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Zum Vergleich mit Methode 1 ist in Abbildung 4.6 die Arnoldzunge aus dieser Methode dargestellt. Wir erkennen gut den eingeschränkten Gültigkeitsbereich. Außerhalb des Dreiecks $|\epsilon| > |\nu|$ ist die formale Lösung für die Potenzialbarriere nicht mehr reell. Der Gültigkeitsbereich ist mit dem Synchronisatationsbereich so gut wie identisch, was auch durchaus sinnvoll ist: Die Annahme seltener Phasensprünge kann nur im Synchronisationsbereich gültig sein.

[6] Die Sprungraten erhält man über die mittlere Zeit, die ein Brownsches Teilchen braucht, um die Potenzialbarriere zu überwinden.

4.2 Rauschen beim OMO

In diesem Abschnitt wird wie in Kapitel 3 auf die Analysemethode der Simulation verzichtet. Auch rein analytisch kann das Rauschen und seine Einflüsse auf die Synchronisierbarkeit gut verstanden werden.

4.2.1 Die Langevingleichungen

Die Langevingleichungen für den OMO lauten, wie auch in [5] und [9] für ein System aus Hohlraum mit beweglichem Spiegel und Lichtfeld angewendet, mit dimensionslosem Ort (x) und Impuls (p)

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\Omega_0^2 x - \gamma\dot{x} + \Omega_0 \widetilde{G} a^\dagger a + \sqrt{\frac{2\gamma\Omega_0}{\hbar}}\, b_{in}(t) \\ \dot{a} &= -(\kappa + \mathrm{i}\Delta)a + \mathrm{i}\widetilde{G} x a + E + \sqrt{2\kappa}\, a_{in}(t)\ . \end{aligned}$$

Dabei ist a_{in} ein bosonischer Operator und b_{in} ein hermitescher Rauschterm. Durch Umskalierung wie in Abschnitt 2.1.1, also $x \longrightarrow \frac{E}{\kappa}\, x$, $a \longrightarrow \frac{E}{\kappa}\, a$ und mit dimensionsloser Zeit $t \longrightarrow \frac{t}{\Omega_0}$ erhält man

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -x - \gamma\dot{x} + g a^\dagger a + \beta\, b_{in}(t) \\ \dot{a} &= -(\kappa + \mathrm{i}\Delta)a + \mathrm{i}g x a + \kappa + \alpha\, a_{in}(t), \end{aligned}$$

wobei außerdem $b_{in} \longrightarrow \frac{b_{in}}{\sqrt{k_B T}}$, so dass sowohl a_{in} als auch b_{in} die Einheit $\sqrt{s}^{-1}$ tragen. Dann sind [7] $\alpha = \frac{\kappa}{E\Omega_0}\sqrt{2\kappa\Omega_0}$ und $\beta = \frac{\kappa}{E\Omega_0}\sqrt{\frac{2\gamma k_B T}{\hbar}}$.

Nun zu den Korrelationsfunktionen der Langevin-Rausch-Terme $a_{in}(t)$ und $b_{in}(t)$. Für a_{in} ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle a_{in}^\dagger(t)\, a_{in}(t')\rangle &= \langle n\rangle\, \Omega_0\, \delta(t-t') \\ \langle a_{in}(t)\, a_{in}^\dagger(t')\rangle &= (1 + \langle n\rangle)\, \Omega_0\, \delta(t-t')\ , \end{aligned} \tag{4.19}$$

wobei $\langle n\rangle \approx 0$, falls das Rauschen ausschließlich aus Vakuumfluktuationen stammt, was hier angenommen wird. Der Faktor Ω_0 rührt von der Dimensionslosigkeit der Zeit t her. Im Hochtemperaturlimes ($\hbar\Omega \ll k_B T$) lauten die Korrelationsfunktionen für b_{in} in den hier verwendeten Einheiten

$$\begin{aligned} \langle b_{in}(t)\rangle &= 0 \\ \langle b_{in}(t)\, b_{in}(t')\rangle &= \Omega_0\, \delta(t-t'). \end{aligned}$$

4.2.2 Eine Fokker-Planck Gleichung für die Phasendifferenz

Wir wollen die Dynamik der Phasendifferenz für den OMO inklusive der Rauscheinflüsse untersuchen. Dazu nehmen wir an, dass diese Rauscheinflüsse klein

[7] Mit Parameterwerten aus Abschnitt 2.3.1 (Parametersatz A) ergibt sich $\alpha \approx 3.1 \cdot 10^{-9}\sqrt{s}$ und $\beta \approx 3.64 \cdot 10^{-8}\sqrt{s}$.

sind, so dass wir die Triebkraft $p_k(\vec{x})$ modifizieren können: Sie soll nun die Rauschterme mit einschließen. Für die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= p(t) \\
\dot{p}(t) &= -x(t) - \gamma p(t) + g a^\dagger a(t) + \beta\, b_{in}(t) \\
\dot{a}(t) &= -\left(\kappa + \mathrm{i}\Delta\right) a(t) + \mathrm{i} g x a(t) + \kappa + \epsilon\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \alpha\, a_{in}(t) \\
\dot{a}^\dagger(t) &= -\left(\kappa - \mathrm{i}\Delta\right) a^\dagger(t) - \mathrm{i} g x a^\dagger(t) + \kappa + \epsilon^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \alpha\, a^\dagger_{in}(t)
\end{aligned}$$

wird die Störung durch Triebkraft und Rauschen zu

$$p_k(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta\, b_{in}(t) \\ \epsilon\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \alpha\, a_{in}(t) \\ \epsilon^*\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \alpha\, a^\dagger_{in}(t) \end{pmatrix}$$

Dadurch ergibt sich für die Phasendynamik mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi = \Omega + \epsilon \underbrace{\sum_k \frac{\partial \Phi(\vec{x}_0(\Phi))}{\partial x_k}\, p_k(\vec{x}_0(\Phi), t)}_{=:Q(\Phi,t)}$$

hier

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi &= \Omega + \beta\, b_{in}(t)\partial_p \Phi(\vec{x}_0) + \left(\left(\epsilon\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \alpha\, a_{in}(t)\right) \partial_a \Phi(\vec{x}_0) + h.c.\right) \\
&= \Omega + \underbrace{\epsilon\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \partial_a \Phi(\vec{x}_0) + h.c}_{=:\, Q_{\mathrm{alt}}(\Phi,t)} \\
&\quad + \underbrace{\beta\, b_{in}(t)\partial_p \Phi(\vec{x}_0) + \left(\left(\alpha\, a_{in}(t)\right) \partial_a \Phi(\vec{x}_0) + h.c.\right)}_{=:\, Q_{\mathrm{neu}}(\Phi,t)} .
\end{aligned}$$

Für die Phase auf dem Grenzzyklus

$$\Phi(\vec{x}_0) = \arctan\left(\frac{\Omega\, p}{-x - \gamma p + g\, a^\dagger a}\right)$$

ergibt sich also zunächst $Q(\vec{x}_0, t)$:

$$\begin{aligned}
Q(\vec{x}_0, t) &= Q_{\mathrm{alt}}(\vec{x}_0, t) + Q_{\mathrm{neu}}(\vec{x}_0, t) \qquad (4.20) \\
&= \frac{-g\Omega p\, \left(\epsilon\, a^\dagger \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + h.c\right)}{\left(-x - \gamma p + g\, a^\dagger a\right)^2 + \left(\Omega\, p\right)^2} \\
&\quad + \frac{\beta\, b_{in}(t) \left[\Omega \left(-x - \gamma p + g a^\dagger a\right) + \Omega p \gamma\right] - g\Omega p\, \alpha\, \left(a^\dagger\, a_{in}(t) + h.c.\right)}{\left(-x - \gamma p + g\, a^\dagger a\right)^2 + \left(\Omega\, p\right)^2}
\end{aligned}$$

Mit den Ersetzungen (3.9), die die Systemvariablen x, p, a und $a^\dagger$ auf dem Grenzzyklus angeben, kann dann $Q(\Phi, t)$ bestimmt werden.

Mit der Phasendifferenz $\Psi(t) = \Phi(t) - \omega t$ ergibt sich für deren zeitliche Entwicklung die Langevin-Gleichung

$$\begin{aligned}\dot{\Psi} &= \dot{\Phi} - \omega \\ &= -\nu + Q(\Phi, \omega, t) \\ &= \underbrace{-\nu + Q_{\text{alt}}(\Phi, \omega, t)}_{h(\Phi,\omega,t)} + \underbrace{Q_{\text{neu}}(\Phi, t)}_{g_j(\Phi,\omega,t)\cdot\Gamma_j(t)} \quad ,\end{aligned}$$

wobei $\Gamma_1(t) = b_{in}(t)$, $\Gamma_2(t) = a_{in}(t)$ und $\Gamma_3(t) = a_{in}^{\dagger}(t)$ mit $g_{1/2/3}$ entsprechend abzulesen an Gl.(4.20). Wegen Gl.(4.6) ergeben sich mit den Korrelationen für a_{in} und b_{in} die einzigen von Null verschiedenen σ_{ij}^2:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^2 &= \frac{1}{2}\Omega_0 \\ \sigma_{23}^2 &= \frac{1}{2}\Omega_0\end{aligned}$$

h, g_1 und g_2 ($g_3 = g_2^*$) ergeben sich zu:

$$h(\Psi, t) = -\nu +$$

$$\frac{gB\Omega^2 \sin((\Psi+\omega t))\left(\epsilon\, \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}gB}{\Omega}\sin(\Psi+\omega t)} \sum_k \alpha_k^* \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\Psi+\omega t)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \epsilon^*\, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}gB}{\Omega}\sin(\Psi+\omega t)} \sum_k \alpha_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\Psi+\omega t)} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}\right)}{\left(-\bar{x} - B\cos(\Psi+\omega t) + \gamma B\Omega \sin(\Psi+\omega t) + g\left(\sum_{n,m} \alpha_n \alpha_m^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)(\Psi+\omega t)}\right)\right)^2 + B^2\Omega^4 \sin^2(\Psi+\omega t)}$$

$$g_1(\Psi, t) = \frac{\beta\left[\Omega\left(-\bar{x} - B\cos(\Psi+\omega t) + g\left(\sum_{n,m} \alpha_n \alpha_m^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)(\Psi+\omega t)}\right)\right)\right]}{\left(-\bar{x} - B\cos(\Psi+\omega t) + \gamma B\Omega \sin(\Psi+\omega t) + g\left(\sum_{n,m} \alpha_n \alpha_m^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)(\Psi+\omega t)}\right)\right)^2 + B^2\Omega^4 \sin^2(\Psi+\omega t)}$$

$$g_2(\Psi, t) = \frac{\alpha g\Omega B\Omega \sin(\Psi+\omega t) \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}gB}{\Omega}\sin(\Psi+\omega t)} \sum_k \alpha_k^* \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\Psi+\omega t)}}{\left(-\bar{x} - B\cos(\Psi+\omega t) + \gamma B\Omega \sin(\Psi+\omega t) + g\left(\sum_{n,m} \alpha_n \alpha_m^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)(\Psi+\omega t)}\right)\right)^2 + B^2\Omega^4 \sin^2(\Psi+\omega t)}$$

Diese Ausdrücke hängen also neben den Systemparametern auch von den Parametern des Grenzzyklus Ω, $\bar{x}$ und B ab. Es ist

$$\alpha_n = (-1)^n\, J_n\left(\frac{gB}{\Omega}\right) \frac{\kappa}{\kappa + \mathrm{i}\Delta - \mathrm{i}g\bar{x} + \mathrm{i}n\Omega} \quad .$$

Damit können wir nun die Drift- und Diffusionskoeffizienten in der Fokker-Planck-Gleichung[8] für die Phasendifferenz Ψ,

$$\frac{\mathrm{d}W(\Psi, t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial}{\partial\Psi}\left(D^{(1)}(\Psi, t)W(\Psi, t)\right) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial\Psi^2}\left(D_j^{(2)}(\Psi, t)W(\Psi, t)\right)$$

[8] Herleitung dieser Gleichung gemäß [12] unter Verwendung eines Differenzenquotienten $(W(\Psi, t+\tau) - W(\Psi, t))/\tau$ im Limes $\tau \longrightarrow 0$.

ermitteln. Nach Gl. (4.7) lautet der der rauschinduzierte Anteil des Driftkoeffizienten

$$\begin{aligned} D^{(1)}_{rauschind}(\Psi,t) &= \sigma^2_{ij}\,\frac{\partial g_i(\Psi,t)}{\partial\Psi}g_j(\Psi,t) \\ &= \sigma^2_{11}\frac{\partial g_1(\Psi,t)}{\partial\Psi}g_1(\Psi,t)+\sigma^2_{23}\frac{\partial g_2(\Psi,t)}{\partial\Psi}g^*_2(\Psi,t). \end{aligned}$$

Der deterministische Anteil des Driftkoeffizienten steht mit

$$D^{(1)}_{det}(\Psi,t) = h(\Psi,t)$$

schon fertig da, und der Diffusionskoeffizient wird gemäß Gl.(4.8) zu

$$\begin{aligned} D^{(2)}(\Psi,t) &= \sigma^2_{ij}\,g_i(\Psi,t)g_j(\Psi,t) \\ &= \sigma^2_{11}g_1(\Psi,t)^2+\sigma^2_{23}\left|g_2(\Psi,t)\right|^2. \end{aligned}$$

Symmetrisierung: Aufgrund der Operatorordnung fallen in der Herleitung des Drift- und Diffusionskoeffizienten die normalgeordneten Terme weg. Dadurch ergeben sich Probleme mit der Reellwertigkeit des rauschinduzierten Anteils des Driftkoeffizienten.
Wie sich noch herausstellen wird, sind jedoch die optischen Rauscheinflüsse auf die Synchronisation sehr gering. Diese optischen Rauscheinflüsse wären die Einzigen, die für einen Quanteneffekt sorgen könnten, der sich auch in der Synchronisation niederschlägt. Antizipieren wir an dieser Stelle den verschwindend geringen Einfluss des optischen Rauschens auf die Synchronisation. Wir können also pragmatisch vorgehen und die normal und antinormal geordneten Produkte, die in den $D^{(1)}$ und $D^{(2)}$ auftauchen, symmetrisieren. Dazu wird ein klassischer Rauschterm α_{in} eingeführt, so dass mit

$$\begin{aligned} a_{in}(t) &\longrightarrow \alpha_{in}(t) \\ a^\dagger_{in}(t) &\longrightarrow \alpha^*_{in}(t) \end{aligned}$$

gilt[9]:

$$\begin{aligned} \langle\alpha_{in}(t)^2\rangle &= 0 \\ \langle\alpha^*_{in}(t)\alpha_{in}(t')\rangle = \langle\alpha_{in}(t)\alpha^*_{in}(t')\rangle &= \frac{1}{2}\langle\Big\{a_{in}(t),a^\dagger_{in}(t')\Big\}\rangle = \frac{1}{2}\Omega_0\delta(t-t'). \end{aligned}$$

Die Verteilungsfunktion, die mit symmetrischer Operatorordnung assoziiert ist, ist die Wigner-Weyl Verteilung, siehe zum Beispiel [14]. Sie kann benutzt werden, um die Erwartungswerte symmetrische geordneter Operatoren im klassischen Bild zu ermitteln:

$$\frac{1}{2}\langle\Big\{a_{in}(t),a^\dagger_{in}(t')\Big\}\rangle = \int|\alpha_{in}|^2\,\mathbb{W}(\alpha_{in},\alpha^*_{in})d^2\alpha_{in}$$

Der Diffusionskoeffizient $D^{(2)}(\Psi,t)=\sigma^2_{11}g^2_1+\sigma^2_{23}\left|g_2\right|^2$ verändert sich effektiv nicht, da zwar ein Term $\sigma^2_{23}\left|g_2\right|^2$ dazukommt, der aber durch einen neuen Faktor

[9] mit $\{\cdot,\cdot\}$ Antikommutator

ein halb wieder weg fällt.
Der symmetrisierte Driftkoeffizient ergibt sich mit $\sigma_{23}^2 = \sigma_{32}^2$ zu

$$\begin{aligned} D^{(1)}(\Psi,t) &= h(\Psi,t) + \sigma_{11}^2 \frac{\partial g_1}{\partial \Psi} g_1 + \frac{1}{2}\left(\sigma_{23}^2 \frac{\partial g_2}{\partial \Psi} g_3 + \sigma_{32}^2 \frac{\partial g_3}{\partial \Psi} g_2\right) \\ &= h(\Psi,t) + \frac{\sigma_{11}^2}{2} \frac{\partial (g_1)^2}{\partial \Psi} + \frac{1}{2}\sigma_{23}^2 \frac{\partial |g_2|^2}{\partial \Psi}. \end{aligned}$$

Zeitmittelung: Nun verwenden wir die Annahme langsamer Dynamik von W. Sie besagt, dass nur die auf der Zeitskala von $\frac{2\pi}{\omega}$ langsame Dynamik zu wesentlichen Veränderungen in der Phase beiträgt, und somit über eine Periode $\frac{2\pi}{\omega}$ gemittelt werden kann. Dies ist im Prinzip die gleiche Idee wie auch schon bei Pikovsky et al. [11], hier beschrieben im Abschnitt zur Theorie der Synchronisation. In diesem Fall wird diese Näherung wegen der Rauschterme aber erst an dieser Stelle durchgeführt.
Wir setzen also unter der Annahme einer langsamen Änderung von W den Differenzenquotienten $\frac{W(\Psi,t+\tau)-W(\Psi,t)}{\tau} \approx \frac{dW}{dt}$.

Die Zeitmittelung bewirkt beim deterministischen Anteil des Driftkoeffizienten, nämlich

$$h(\Psi,t) = -\nu + \left(\epsilon\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi} f(\Psi+\omega t) + c.c.\right),$$

dass nur eine einfache Ψ-Abhängigkeit übrig bleibt. Die rauschinduzierten Terme verschwinden im Driftkoeffizienten ganz, weil die g_i nach der Symmetrisierung nur in der Ableitung nach Ψ auftreten. Wird nun die Ψ- oder t-Ableitung einer Funktion, die wie die g_i periodisch in $(\Psi+\omega t)$ ist, über $\frac{2\pi}{\omega}$ gemittelt, so verschwindet der Term.

Für den Diffusionskoeffizienten verschwindet die Ψ-Abhängigkeit. Denn in den g_i tritt die Zeit t nur in der Form $(\Psi+\omega t)$ auf. Diese Terme fallen bei Mittelung über $\frac{2\pi}{\omega}$ weg.
Insgesamt ergibt sich für Drift- und Diffusionskoeffizienten für den OMO

$$\boxed{\begin{aligned} D^{(1)}(\Psi) &= \overline{h(\Psi,t)}\,, \\ D^{(2)} &= \sigma_{11}^2 \overline{g_1^2} + \sigma_{23}^2 \overline{|g_2|^2}\,. \end{aligned}}$$

Der Driftkoeffizient ist mit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi}$ einfach Ψ-abhängig und der Driftkoeffizient konstant über Ψ. Somit liegt eine Situation vor wie in dem in Abschnitt 4.1.4 gewählten Beispiel. Daher kann die nun folgende Analyse auf Synchronisation auch völlig analog zu unseren Beispielrechnungen durchgeführt werden.

4.2.3 Synchronisationsanalyse

Im Folgenden wird die Analyse wegen des größeren Gültigkeitsbereiches nach Methode 1 (siehe Abschnitt 4.1.4) durchgeführt. Dabei werden wieder die glei-

chen Näherungen verwendet, die auch schon in Abschnitt 3.2 bei der Analyse auf rauschfreie Synchronisation Verwendung gefunden haben.

Wegen der gegenüber dem Beispiel in Abschnitt (3.2 leicht veränderten Ψ-Abhängigkeit von $\overline{h}(\Psi)$ muss der Wahrscheinlichkeitsstrom J neu abgeleitet werden. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\overline{h(\Psi)} &= \frac{\omega}{2\pi}\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}} h(\Psi,\Psi+\omega t')dt' \\ &= -\nu+\epsilon\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi}\underbrace{\frac{\omega}{2\pi}\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}} f(\Psi+\omega t)dt'}_{=:F}+c.c.)\end{aligned}$$

mit $f=\frac{h(\Psi)+\nu}{\epsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Psi}$. Analog zu Abschnitt 4.1.4 ergibt sich nun für den Wahrscheinlichkeitsstrom

$$\delta_{n,0}J=-\nu W_n+\epsilon\,(W_{n-1}F+W_{n+1}F^*)\ ,$$

und somit für $n=0$

$$\begin{aligned}J &= -\frac{\nu}{2\pi}+\epsilon\,(FW_1^*+F^*W_1) \\ &= -\frac{\nu}{2\pi}+2\epsilon\,(\mathrm{Re}\,(F)\mathrm{Re}\,(W_1)+\mathrm{Im}\,(F)\mathrm{Im}\,(W_1))\ . \qquad (4.21)\end{aligned}$$

Für $n>0$ ergibt sich folgende Rekursionsformel

$$W_n=\frac{FW_{n-1}}{\frac{\nu+\mathrm{i}nD^{(2)}}{\epsilon}-F^*\frac{W_{n+1}}{W_n}}$$

und somit für W_1 näherungsweise:

$$W_1=\frac{F\frac{1}{2\pi}}{\frac{\nu+\mathrm{i}D^{(2)}}{\epsilon}-\frac{|F|^2}{\frac{\nu+\mathrm{i}2D^{(2)}}{\epsilon}-\frac{|F|^2}{\frac{\nu+\mathrm{i}3D^{(2)}}{\epsilon}-(\ldots)}}} \qquad (4.22)$$

Quasi-deterministischer Fall: Zunächst wollen wir die Analyse für den quasi-deterministischen Fall durchführen, um zu überprüfen, ob die Ergebnisse dann mit denen der rauschfreien Analyse übereinstimmen. Deshalb verwenden wir einen willkürlich gewählten, sehr kleinen Diffusionskoeffizienten von $D^{(2)}=10^{-5}$. Der Driftkoeffizient ist rein deterministisch mit $D^{(1)}_{det}(\Psi)=\overline{h}(\Psi)$. Wird nun J aus Gl.(4.21) mit den typischen Parametern über ν und ϵ dargestellt ergibt sich der schöne Plot in Abb. 4.7.

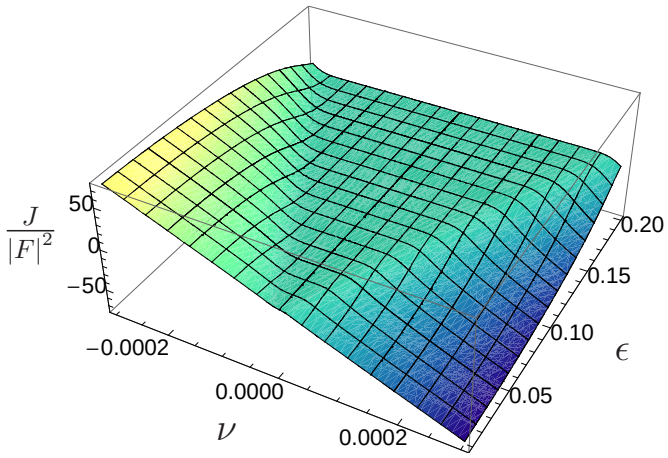

Abbildung 4.7: Die Arnoldzunge für den OMO (Parametersatz A) im quasi-deterministischen Fall, also $D^{(2)} = 10^{-5}$ willkürlich gesetzt.

Wir erhalten in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus Abschnitt 3.2 für den Rand des Synchronisationsplateaus hier $\nu_{max} \approx 0.00016$ bei $\epsilon = 0.1$.

Analyse mit Diffusionskoeffizient: Nun soll der Diffusionskoeffizient für den OMO abgeschätzt werden.

$$D^{(2)} = \underbrace{\sigma_{11}^2 \overline{g_1^2}}_{\text{mech}} + \underbrace{\sigma_{23}^2 \overline{|g_2|^2}}_{\text{opt}}$$

Durch die Zeitmittelung fällt die Ψ-Abhängigkeit in g_1 und g_2 weg und es ergibt sich ein konstanter Diffusionskoeffizient. Nun stellt sich heraus, dass sein Wert sehr klein ist, und zwar um sechs Größenordnungen kleiner als der angenommene im quasi-deterministischen Fall. Das mechanische Rauschen ist dabei der entscheidende Anteil mit $D_{mech}^{(2)} \approx 10^5 \cdot D_{opt}^{(2)}$ (siehe dazu Abschnitt 4.2.4). Allerdings ist eben auch das mechanische Rauschen von der Größenordnung $D_{mech}^{(2)} \approx 10^{-11}$ und somit so klein, dass kein merkbarer Einfluss auf die Synchronisationseigenschaften auftritt[10].

Die rauschinduzierte Drift ist verschwunden, daher sind mit obigen Überlegungen die Rauscheinflüsse auf die Synchronisation für den OMO untersucht. Wir stellen fest: Mit Parametersatz A und bei Raumtemperatur ist das Rauschen so klein, dass sich die Synchronisationseigenschaften des Systems gegenüber dem idealisierten rauschfreien Fall nur vernachlässigbar verändern.

[10] Wollten wir dennoch den Formalismus mit dem Kettenbruch verwenden, müssten wir 10^{10} Schritte iterieren, damit der Kettenbruch konvergiert. Denn für Konvergenz muss gelten $n \gg \epsilon / D^{(2)}$.

Zu der Frage, ob eine Veränderung der Parameter daran etwas ändert, untersuchen wir nun noch einmal genauer die Größe der verschiedenen Rauscheinflüsse.

4.2.4 Quantifizierung der verschiedenen Rauscheinflüsse

Zur Quantifizierung des mechanischen und optischen Rauschens wird deren Wirkung auf den mechanischen Oszillator betrachtet und verglichen. Mit $a(t) = a_s + \delta a(t)$, ergibt sich in der Linearisierung um den Wert im stationären Zustand $a_s \approx \frac{E}{\kappa + \mathrm{i}\Delta}$ für eine kleine Rausch-Störung $\delta a(t)$

$$\ddot{x} = -x - \gamma\dot{x} + g\,(a_s^* a_s) + g\,\left(a_s^*\,\delta a(t) + \delta a^\dagger(t)\,a_s\right) + \beta\,b_{in}(t)$$

Betrachten wir also die Zweizeitenkorrelationsfunktionen $k(t,t') = \sigma^2 R(t,t')$ jeweils für beide Rauschterme und vergleichen die dimensionslosen Rauschintensitäten σ^2_{mech} und σ^2_{opt}.
Für das mechanische Rauschen ergibt sich schnell[11]

$$\begin{aligned} k_{mech}(t,t') = \beta^2\langle b_{in}(t)\,b_{in}(t')\rangle &= \Omega_0\,\beta^2\,\delta(t-t') \\ \longrightarrow \sigma^2_{mech} &= \Omega_0\,\beta^2 = k_B T\Omega_0\left(\frac{\kappa}{E\Omega_0}\right)^2\frac{2\gamma}{\hbar}\,. \end{aligned}$$

Für das optische Rauschen erwarten wir

$$\frac{k_{opt}(t,t')}{g^2\,|a_s|^2} = \underbrace{\langle\delta a(t)\,\delta a(t')\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle\delta a(t)\,\delta a^\dagger(t')\rangle}_{\propto\alpha^2} + \underbrace{\langle\delta a^\dagger(t)\,\delta a(t')\rangle}_{\approx 0} + \underbrace{\langle\delta a^\dagger(t)\,\delta a^\dagger(t')\rangle}_{=0}$$

Es ist also $\langle\delta a(t)\,\delta a^\dagger(t')\rangle$ zu berechnen. Mit

$$\begin{aligned} \delta a(t) &= \lim_{t\to\infty}\alpha\,\mathrm{e}^{(-(\kappa+\mathrm{i}\Delta)+\mathrm{i}g\bar{x})t+\frac{\mathrm{i}gB}{\Omega}\sin(\Omega t+\varphi_0)} \\ &\quad\cdot\int_0^t ds\;a_{in}(s)\;\mathrm{e}^{-\{-(\kappa+\mathrm{i}\Delta)+\mathrm{i}g\bar{x}\}s-\frac{\mathrm{i}gB}{\Omega}\sin(\Omega s+\varphi_0)} \end{aligned}$$

und wegen der Deltafunktion aus (4.19) ergibt sich zunächst für $t > t'$

$$\begin{aligned} \langle\delta a(t)\,\delta a^\dagger(t')\rangle &= \alpha^2\,\Omega_0\lim_{t,t'\to\infty}\underbrace{\int_0^{t'} ds'\;\mathrm{e}^{2\kappa s'}}_{\left(\mathrm{e}^{2\kappa t'}-1\right)} \\ &\quad\cdot\mathrm{e}^{-\kappa(t+t')+\mathrm{i}(-\Delta+g\bar{x})(t-t')+\frac{\mathrm{i}gB}{\Omega}[\sin(\Omega t+\varphi_0)-\sin(\Omega t'+\varphi_0)]}. \end{aligned}$$

Im Limes ergibt sich dann (nun gültig für $t \lesseqgtr t'$) unter Verwendung eines Additionstheorems

$$\begin{aligned} \langle\delta a(t)\,\delta a^\dagger(t')\rangle &= \frac{\alpha^2\,\Omega_0}{2\kappa}\,\mathrm{e}^{(-\mathrm{i}\Delta+\mathrm{i}g\bar{x})(t-t')} \\ &\quad\cdot\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}gB}{\Omega}\left[2\cos(\frac{1}{2}\Omega(t+t')+\varphi_0)\cdot\sin(\frac{1}{2}\Omega(t-t'))\right]}\mathrm{e}^{-\kappa|t-t'|} \end{aligned}$$

[11] $\sigma^2_{mech} \approx 6.62\cdot 10^{-8}$ für Parametersatz A

Wegen $\langle a_{in}(t)\rangle = 0$ und $\langle a_{in}^{\dagger}(t')\rangle = 0$ erhält man also[12] mit $\tau = \frac{t-t'}{2}$ und $T = \frac{t+t'+\varphi_0}{2}$

$$\begin{aligned} k_{opt}(\tau,T) &= \sigma_{opt}^2\, R_{opt}(\tau,T) \\ \longrightarrow \sigma_{opt}^2 &= g^2\ |a_s|^2 \left(\frac{\kappa}{E}\right)^2 , \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} R_{opt}(\tau,T) &= \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(g\bar{x}-\Delta)\tau}\mathrm{e}^{-2\kappa|\tau|}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}gB}{\Omega}2\cos(T)\cdot\sin(\Omega\tau)} \\ &= \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(g\bar{x}-\Delta)\tau}\mathrm{e}^{-2\kappa|\tau|}\sum_n J_n\left(\frac{2\cos(T)gB}{\Omega}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Omega\tau} . \end{aligned}$$

Somit ist das Rauschen, das beim mechanischen Oszillator aus dem optischen Teil des Systems ankommt, kein weißes Rauschen.

Vergleich: Für den Vergleich der bestimmenden Terme in den Rauschamplituden, nämlich σ_{mech}^2 und σ_{opt}^2 ergibt sich

$$\frac{\sigma_{mech}^2}{\sigma_{opt}^2} = \frac{\Omega_0\ \beta^2}{g^2\ |a_s|^2\ \frac{\alpha^2\ \Omega_0}{2\kappa}} = \frac{k_B T\ 2\gamma}{g^2\ |a_s|^2\ \Omega_0\ \hbar}.$$

Somit wächst das mechanische Rauschen gegenüber dem optischen mit der Temperatur und der mechanischen Dämpfung, während das optische im Verhältnis zum mechanischen Rauschen mit der Kopplung, der stationären Photonenzahl im Resonator und der Frequenz des mechanischen Oszillators wächst.
Für Parametersatz A erhalten wir mit $|a_s|^2 \approx 0.5$ ein Verhältnis von

$$\frac{\sigma_{mech}^2}{\sigma_{opt}^2} \approx 1.67 \cdot 10^4.$$

Für einen aussagekräftigen Vergleich müssen nun aber auch die unterschiedlichen Spektren berücksichtigt werden: Während das mechanische Rauschen weiß ist, also ein konstantes Spektrum hat, ergibt sich für das optische Rauschen das oben diskutierte von T abhängige nicht konstante Spektrum.
Mit einem gemäß

$$S_{R(\tau)}(\omega) := \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} d\tau\ R(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}$$

definierten Rauschspektrum ergibt sich demnach

$$S_{mech}(\omega) = \frac{\sigma_{mech}^2}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{\tau=-\infty}^{\infty} d\tau\ \delta(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}}_{=1}$$

[12] $\sigma_{opt}^2 \approx 3.92 \cdot 10^{-12}$ für Parametersatz A

und

$$
\begin{aligned}
S_{opt}(\omega) &= \frac{\sigma_{opt}^2}{\sqrt{2\pi}} \sum_n J_n\left(\frac{2\cos(T)gB}{\Omega}\right) \int_{\tau=-\infty}^{\infty} d\tau\, \mathrm{e}^{-2\kappa|\tau|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}[n\Omega\tau+2(g\bar{x}-\Delta)-\omega]\tau} \\
&= \frac{\sigma_{opt}^2}{\sqrt{2\pi}} \sum_n J_n\left(\frac{2\cos(T)gB}{\Omega}\right) \underbrace{\frac{4\kappa}{(2\kappa)^2 + (\omega - (n\Omega + 2g\bar{x} - 2\Delta))^2}}_{:=K_n} .
\end{aligned}
$$

Hierbei können entsprechend der Größe des Arguments der Besselfunktionen die höherindizierten Seitenbänder weggelassen werden, so dass eine Auswertung einer endlichen Summe genügt. Die maximale Amplitude des Spektrums wird, weil die Wichtung durch die Besselterme nie größer als eins wird, bestimmt durch die lorentzartigen K_n. Im Bandenzentrum an der Stelle $\omega = 2(g\bar{x} - \Delta)$ hat das Spektrum sein Maximum. An dieser Stelle schätzen wir nun eine obere Grenze ab, indem wir die Summe ohne die Wichtung durch die Besselfunktionen auswerten:

$$
\begin{aligned}
\sum_n K_n &= \frac{2z}{\Omega} \sum_n \frac{1}{(z)^2 + n^2} \\
&= \frac{2z}{\Omega} \cdot \frac{1 + \pi z \coth(\pi z)}{2\,(z)^2}
\end{aligned}
$$

mit $z = \frac{2\kappa}{\Omega}$.

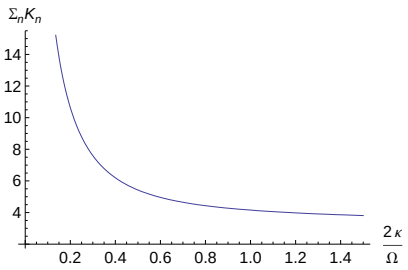

Abbildung 4.8: Summe über die Lorentzkurven in Abhängigkeit von $2\kappa/\Omega$ (ohne die Wichtung durch die Besselfunktionen) an der Stelle $\omega = 2(g\bar{x} - \Delta)$ im Bandenzentrum

An der Stelle $z = 1.2$, die Parametersatz A entspricht, erhalten wir eine obere Grenze von $\sum_n K_n \approx 4$. Diese Grenze ist, wie in Abb. 4.8 deutlich zu erkennen ist, stark von $z = \frac{2\kappa}{\Omega}$ abhängig. Diese Größe, das Verhältnis von Breite zu Abstand der Lorentzkurven auf der Frequenz-Achse, gibt die Trennung der K_n voneinander an. Je schlechter sie voneinander getrennt sind, je kleiner also die optische Dämpfung κ, desto größer wird die obere Grenze. Da aber $\sigma_{opt}^2 \propto \kappa^2$ gilt, nimmt insgesamt die Amplitude des optischen Rauschspektrums wie erwartet mit der optischen Dämpfung zu und nicht etwa ab. Weil auch $\sigma_{mech}^2 \propto \kappa^2$ könnte man durch Verringerung von κ dennoch eine Veränderung des Verhältnisses von mechanischer zu optischer Rauschwirkung erreichen.

Um jedoch insgesamt den maximalen Wert des optischen Spektrums so zu erhöhen, dass es mit dem des mechanischen vergleichbar wird, müsste κ (bei festem Ω) um bis zu vier Größenordnungen verringert werden. Dies ist also eine rein theoretische Überlegung.

Ergebnis: Das optische Rauschen hat in seiner Wirkung auf den mechanischen Oszillator eine gegenüber dem mechanischen Rauschen vernachlässigbare Amplitude. Dies gilt für alle Frequenzen, sogar im Bandenzentrum, wo es maximal wird. Zu der Frage, ob in anderen Parameterbereichen als dem hier untersuchten Parametersatz A doch noch ein spürbarer Effekt des Rauschens auf die Synchronisation auftritt, seien noch einmal die Rauschterme

$$\begin{aligned} \sigma^2_{mech} &\propto k_B T\, \gamma\ , \\ \sigma^2_{opt} &\propto g^2\, |a_s|^2 \end{aligned}$$

in ihren wesentlichen Abhängigkeiten betrachtet.
Den dominierenden mechanischen Rauschterm zu vergrößern ist relativ leicht: Eine Temperaturerhöhung ist die naheliegenste Variante. Allerdings wird damit keine Erhöhung um etliche Größenordnungen zu erreichen sein. Es ist auch zu erwarten, dass der mechanische Rauscheinfluss zunimmt, wenn wir durch Erhöhung der Dämpfung γ in ein Regime nahe der Schwelle zum Zusammenbruch des Grenzzyklus gehen. Allerdings ist die Schwelle bereits nach einer Erhöhung der Dämpfung γ um zwei Größenordnungen erreicht, so dass auch das mechanische Rauschen nur um zwei Größenordnungen größer wird. Wegen dieser Grenzsetzung durch das Schwellenverhalten reicht die maximal mögliche Vergrößerung des mechanischen Rauschterms nicht aus, um doch noch einen spürbaren Einfluss auf die Synchronisationseigenschaften des Systems zu nehmen.

Durch Vergrößerung der stationären Photonenzahl im Resonator bzw. des Parameters g durch Erhöhung der Eingangsleistung kann das optische Rauschen erhöht werden. Hier stehen nun keine Schwellen, an denen der Grenzzyklus zusammenbricht, im Weg. Vielmehr bewegen wir uns bald in einem Regime mit sehr vielen Grenzzyklen. Dort aber liegt auch das Problem. Für sehr hohe Eingangsleistungen geht das System in ein chaotisches Regime über. Wie dann eine externe Triebkraft wirkt und inwieweit dann noch Synchronisation auftritt sind Fragen, die über das Ziel dieser Diplomarbeit hinausgehen.

Dennoch gibt es eine Möglichkeit, das Rauschen im System soweit zu vergrößern, dass man die Synchronisationseigenschaften unter Rauscheinflüssen testen kann. Dazu müsste man die grundlegenden Annahmen über die Umgebung des OMO verändern. Diese Annahmen besagten hier, dass der Laser am Schrotrauschen operiert, und somit nur Vakuumfluktuationen zum Rauschen beitragen. Daher ist das optische Rauschen hier auch proportional zur Photonenzahl. Lässt man aber auch andere Fluktuationen in den Bädern zu, beispielsweise diffuses Licht im Labor, das auch an den relevanten optischen Frequenzen beiträgt, so wird eine weitere Rauschquelle hinzugenommen, die auch ohne Erhöhung der stationären Photonenzahl das optische Rauschen vergrößern kann.

V
Zusammenfassung

Die zentrale Idee für das Konzept dieser Diplomarbeit war die Verbindung eines quantenoptischen Systems, des opto-mechanischen Oszillators (OMO), mit einem Phänomen aus dem weiten Gebiet der nichtlinearen Dynamik, der Synchronisation.
Der OMO ist ein dissipatives mechanisches System, das zusammen mit einer parametrischen Anregung durch Lichtdruck die Eigenschaften eines selbsterregten Oszillators erhält. Dies ist die Voraussetzung dafür, dass der OMO synchronisieren kann.

In Kapitel 2 führten wir zunächst eine allgemeine Untersuchung der Systemeigenschaften durch. Mit analytischen Methoden und einer Simulation des Systemverhaltens wurde ein Verständnis für die verschiedenen Regimes entwickelt. Parameterbereiche, für die kein Grenzzyklus möglich ist, wurden identifiziert. Die Ergebnisse sind in Abb. 2.5 anschaulich zusammengefasst.
Ein aus den zahlreichen Analysen des OMO in der Quantenoptik bekannte Phänomen konnte verstanden werden: Es ist die Verstimmung zwischen Pumpfrequenz und Hohlraumresonanz, die bestimmt, ob ein Regime der Anregung oder Kühlung herrst. Allerdings wurde eine Anomalie identifiziert: Bei großen Ausangsamplituden der mechanischen Oszillation wird auch im Regime der Kühlung ein Grenzzyklus möglich. Die die Anzahl möglicher Grenzzyklen bestimmende Größe ist neben der Verstimmung auch das Verhältnis von mechanischer Dämpfung zum Quadrat der Kopplungskonstante zwischen optischen und mechanischen Komponenten.
Die sehr gute Übereinstimmung der analytisch gewonnenen Ergebnisse mit denen der Simulation spricht für die verwendeten Methoden.

In Kapitel 3 wurde der OMO mit analytischen Mitteln auf seine Synchronisierbarkeit untersucht. Natürlich kann nur in Regimes mit Grenzzyklen auch Synchronisation auftreten. Aber auch dort, wo das System synchronisierbar ist, ist das Synchronisationsplateau sehr schmal. Der OMO ist also nur schlecht zu synchronisieren. Die Tatsache, dass die natürliche Frequenz des selbsterregten Oszillators über alle Parameterbereiche nur um einige zehntel Prozenz schwankt, lässt uns vermuten, dass der OMO in seinen Schwingungseigenschaften zu steif ist, um eine Synchronisation auch für größere Verstimmungen der Triebkraft zuzulassen.
Der Betrag der optischen Verstimmung im Regime der Anregung lässt über einem Schwellenwert hinaus keine Synchronisierung mehr zu. Es gibt ein Regime, indem der OMO, obwohl er einen Grenzzyklus aufweist, nicht synchronisierbar ist. Dieses Ergebnis ist im Phasendiagramm in Abb. 3.9 gut erfassbar. Möglicherweise ist durch die große Verstimmung die Wechselwirkung des Lichtes mit

dem mechanischen Oszillator so gering, dass zwar noch Selbsterregung auftritt, aber eine kleine äußere Störung nicht mehr vom Lichtfeld auf die mechanische Komponente übertragen wird.

In Kapitel 4 wurde das bis dahin vernachlässigte Rauschen im System mit einbezogen. Mit den dabei getroffenen Annahmen über die Umgebung des OMO stellten sich die Rauscheinflüsse als so gering heraus, dass sie keine detektierbare Auswirkung auf die Synchronisierbarkeit des Systems hatten. Die Variation der Parameter konnte als Möglichkeit zur Verstärkung des Rauschens praktisch ausgeschlossen werden. Um nun die Synchronisation mit Rauschen für dieses System testen zu können, müssten vielmehr die Annahmen über die Rauscheinflüsse verändert werden. Eine Abkehr von der Pumpe am Schrotrauschen wäre dafür eine Möglichkeit.

Anhang

Näherung kleiner Besselargumente

In Tabelle 2.1 sind die Parametersätze B, D und E, an den Schwellen zum Zusammenbrechen des Grenzzyklus, diejenigen, die die Bedingung für die Gültigkeit der hier verwendeten Näherung so erfüllen, dass die Besselfunktionen von Ordnung 2 und höher vernachlässigbar klein werden. Denn nach Bedingung (2.19) gilt

$$J_n(z) \approx \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

für $z \ll 1$ und $n \geq 0$. Damit das Besselargument klein gegen eins ist, $\frac{gB}{\Omega} \ll 1$, muss der Grenzzyklus so beschaffen sein, dass $B \ll \frac{\Omega}{g}$ gilt. Dann erhält man:

$$\begin{aligned}
J_0\left(\frac{gB}{\Omega}\right) &\approx 1 \\
J_{\pm 1}\left(\frac{gB}{\Omega}\right) &\approx \pm\left(\frac{gB}{2\Omega}\right) = \pm\frac{1}{2}\left(\frac{gB}{\Omega}\right) \\
J_{\pm 2}\left(\frac{gB}{\Omega}\right) &\approx \frac{1}{2}\left(\frac{gB}{2\Omega}\right)^2 = \frac{1}{8}\left(\frac{gB}{\Omega}\right)^2
\end{aligned}$$

mit der Eigenschaft $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ der Besselfunktionen erster Art.
So ergibt sich

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &\approx \frac{\kappa}{\mathrm{i}\widetilde{\Delta}} \\
\alpha_{\pm 1} &\approx \pm\kappa\frac{1}{2}\left(\frac{gB}{\Omega}\right)\frac{-1}{\mathrm{i}\widetilde{\Delta} \pm \mathrm{i}\Omega} \\
\alpha_{\pm 2} &\approx \frac{\kappa}{8}\left(\frac{gB}{\Omega}\right)^2 \frac{1}{\mathrm{i}\widetilde{\Delta} \pm 2\mathrm{i}\Omega}
\end{aligned}$$

mit der abkürzenden Schreibweise $\mathrm{i}\widetilde{\Delta} = \kappa + \mathrm{i}\Delta - \mathrm{i}g\bar{x}$ (also $\widetilde{\Delta} = \Delta - g\bar{x} - \mathrm{i}\kappa$ bzw. $\left|\widetilde{\Delta}\right|^2 = \kappa^2 + (-g\bar{x} + \Delta)^2$).
Im Folgenden wollen wir diese Näherung für Entwicklungen bis zur 0. Ordnung und 2. Ordnung in B betrachten.

A.1 0. Ordnung in B

Eine Entwicklung, die nur Terme berücksichtigt, die nullter Ordnung in B sind, hat einen klaren Vorteil: Die Amplitude B fällt als gesuchter Parameter weg, und es bleiben als Unbekannte nur die konstante Auslenkung $\bar{x}$ und die Frequenz Ω.
In diesem Abschnitt sind alle graphischen Darstellungen sowie die numerischen Auswertungen für die Parameter aus Satz D erstellt worden. So wird die Gültigkeit der Näherung kleiner Besselargumente sichergestellt.

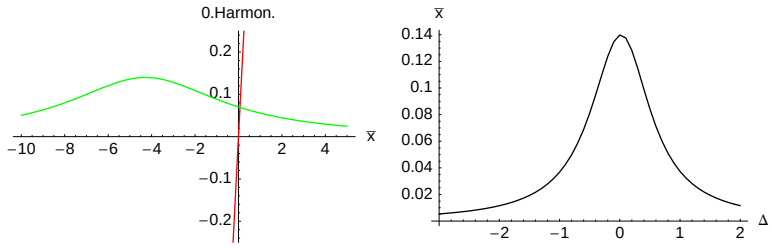

Abbildung A.1: Links: Graphische Lösung für $\bar{x}$ aus (A.1). Rechts die numerisch iterativ ermittelte Lösung für $\bar{x}$ bei variierender Verstimmung Δ.

0. Harmonische Gl. (2.17), der Vergleich an der 0. Harmonischen, also der konstante Anteil bzw. die gemittelte Kraft, wird von 0. Ordnung in B, wenn nur die Besselfunktionen nullter Ordnung verwendet werden.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= g\sum_l \alpha_l\alpha_l^* \approx g\alpha_0\alpha_0^* \\ &= \frac{g\kappa^2}{\left|\widetilde{\Delta}\right|^2} \\ &= \frac{g\kappa^2}{\kappa^2 + (-g\bar{x}+\Delta)^2} \end{aligned} \tag{A.1}$$

Da hier auch Ω nicht in dieser Gleichung auftaucht, ist sie eindeutig nach $\bar{x}$ lösbar. Die rechte Seite hat die Struktur einer Lorentzkurve in $\bar{x}$.
Wird der Parameter Δ variiert, so verschiebt sich diese Lorentzkurve auf der $\bar{x}$ - Achse. Die numerisch ermittelten Lösungen werden in Abb. A.1, rechts, aufgetragen. Man kann schon aus der graphischen Lösung (links) gut erkennen, dass keine Bifurkation auftritt. Analytisch kann man ableiten, dass keine Bifurkation auftritt, sofern die maximale Steigung der Lorentzkurve nicht größer als eins ist. Die maximale Steigung liegt bei $\bar{x} = \frac{3\Delta-\sqrt{3}\kappa}{3g}$ und beträgt hier

$$\frac{\partial\bar{x}}{\partial\Delta} = \frac{3\sqrt{3}g^2}{8\kappa}.$$

Für die Parameter, die eine Gültigkeit dieser Näherung garantieren, ist dieser Ausdruck deutlich kleiner als eins[1]. Daher ist garantiert, dass im Gültigkeitsbereich keine Bifurkation auftritt.

1. Harmonische Der Ausdruck $\sum_l \alpha_l\alpha_{l+1}^*$ wird in dieser Näherung linear in B, wenn nur die Summanden $J_{-1}J_0$ $(l=-1)$ und J_0J_1 $(l=0)$ berücksichtigt werden [2] . Da der entsprechende Vergleichsausdruck ebenfalls linear in B ist,

[1] Für größeres g kann man aus Tabelle 2.1 schnell ablesen, dass die Näherung kleiner Besselargumente nicht mehr gültig ist.

[2] Die nächsthöhere Ordnung in B ist die dritte, hierfür müssen zusätzlich die Summanden $J_{-2}J_{-1}$ $(l=-2)$ und J_1J_2 $(l=1)$ berücksichtigt werden (siehe Abschnitt A.2).

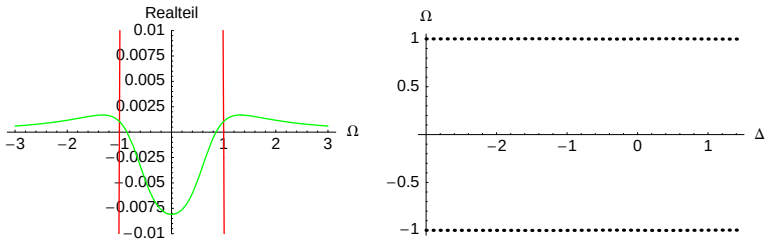

Abbildung A.2: Links: Graphische Lösung für Ω aus dem Realteil der 1. Harmonischen (niedrigste Ordnung in B). Rechts die numerisch ermittelte Lösung als Funktion von Δ.

reduziert sich insgesamt die Ordnung in B um eins.

$$\begin{aligned} \frac{B}{2}\left(1-\Omega^2-\mathrm{i}\gamma\Omega\right) &\approx g\left(\alpha_{-1}\alpha_0^* + \alpha_0\alpha_1^*\right) \\ &= -\frac{g^2\kappa^2 B}{2\Omega\left|\widetilde{\Delta}\right|^2}\cdot\left(\frac{\widetilde{\Delta}^*}{\widetilde{\Delta}^*+\Omega} - \frac{\widetilde{\Delta}}{\widetilde{\Delta}-\Omega}\right) \end{aligned} \tag{A.2}$$

Für den Realteil:

$$\frac{1}{2}\left(1-\Omega^2\right) = -\frac{g^2\kappa^2}{2\Omega\left|\widetilde{\Delta}\right|^2}\cdot\mathrm{Re}\left(\frac{\widetilde{\Delta}^*}{\widetilde{\Delta}^*+\Omega} - \frac{\widetilde{\Delta}}{\widetilde{\Delta}-\Omega}\right) \tag{A.3}$$

Für diesen Ausdruck bietet sich eine Lösung nach Ω an. Die linke Seite von Gl.(A.3) ist eine nach unten geöffnete Parabel in Ω mit Nullstellen bei $\Omega = 1$ und[3] -1. Der Scheitelpunkt der Parabel liegt mit $\frac{1}{2}$ deutlich über den typischen Werten, die die rechte Seite der Gleichung bei $\Omega = 1$ annimmt. Somit bestimmt der Realteil (also die Energiebilanz) den Parameter Ω auch für variierendes Δ zu 1.

Für den Imaginärteil:

$$-\frac{\gamma\Omega}{2} = -\frac{g^2\kappa^2}{2\Omega\left|\widetilde{\Delta}\right|^2}\cdot\mathrm{Im}\left(\frac{\widetilde{\Delta}^*}{\widetilde{\Delta}^*+\Omega} - \frac{\widetilde{\Delta}}{\widetilde{\Delta}-\Omega}\right) \tag{A.4}$$

An der graphischen Lösung für Ω aus Gl.(A.4), also der Leistungsbilanz, in Abb. A.3 erkennen wir drei Lösungen.

Die numerisch ermittelten Lösungen für Ω sind als Funktion von Δ dargestellt (mit $\bar{x}$ aus der Lösung für die 0.Harmonische). Es zeigen sich auch hier zwei Bereiche von Lösungen, die in Abb. A.4 separat dargestellt werden. Die Lösung bei Null zeigt numerisches Rauschen. Die Lösung bei $\Omega \approx 1$ verschwindet hier an zwei Schwellen Δ_{s1} und Δ_{s2}.

[3] Da der hier ausgewertete Ausdruck aus einem Vergleich an positiven Frequenzen Ω folgt, ist hier auch nur der Bereich positiver Frequenzen zu beachten.

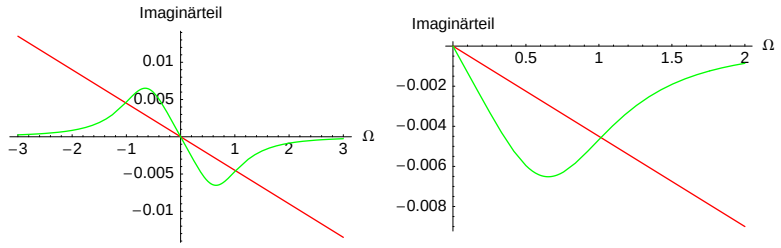

Abbildung A.3: Graphische Lösung für Ω aus dem Imaginärteil der 1. Harmonischen (0. Ordnung in B)

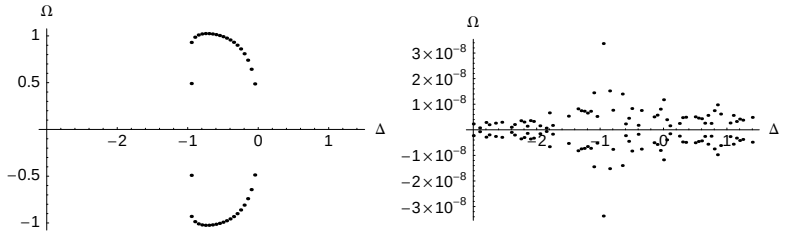

Abbildung A.4: Numerisch ermittelte Lösung für Ω aus dem Imaginärteil der 1. Harmonischen

Auch hier kann analytisch verstanden werden, wann es eine oder drei Lösungen für Ω gibt. Bei drei Lösungen, darunter eine mit $\Omega > 0$, liegt ein Grenzzyklus vor. Daher kann wieder über die Steigung der linken und rechten Seite von Gl.(A.4) an der Stelle $\Omega = 0$ eine neue Größe θ definiert werden, die negativ ist, wenn ein Grenzzyklus angezeigt ist:

$$\theta := \frac{\gamma}{2} - \partial_\Omega \left(-\frac{g^2\kappa^2}{2\Omega \left|\widetilde{\Delta}\right|^2} \cdot \mathrm{Im} \left(\frac{\widetilde{\Delta}^*}{\widetilde{\Delta}^* + \Omega} - \frac{\widetilde{\Delta}}{\widetilde{\Delta} - \Omega} \right) \right)_{\Omega=0} \overset{!}{<} 0$$

Qualitativ liefert also diese analytische Analyse des Imaginärteils in der 0. Ordnung in B der Näherung kleiner Besselargumente die gleichen Ergebnisse für das Schwellenverhalten in den Regimes B, D und E wie schon im Fall der Mitnahme relevanter Seitenbänder. Konkret liefert die Überlegung $g_s = 0.008$, $\gamma_s = 6.25 \cdot 10^{-3}$ und $\Delta_s = 0.01525$, was nicht sehr gut mit den Ergebnissen der Simulation übereinstimmt.
In Abb. A.4 wird weiter Parametersatz D untersucht: Die Dämpfung γ hat den Wert aus Parametersatz D, nahe der Schwelle γ_s, und zusätzlich wird Δ variiert. Daher ergibt sich ein neues Schwellenverhalten für die Verstimmung. Analytisch ergeben sich zwei neue Schwellen $\Delta_{s1} \approx -0.91$ und $\Delta_{s2} \approx -0.02$.
Hier tritt also erstmals eine Abweichung der Frequenz Ω von der natürlichen Frequenz mit dem Wert 1 auf. Es ist aber nicht verwunderlich, dass die Frequenz an den Schwellen, wo der Grenzzyklus zusammenbricht, ebenfalls verschwindet.

A.2 2. Ordnung in B

Werden die Gleichungen (2.17), (2.22) und (2.23) in der Näherung kleiner Besselargumente bis zur zweiten Ordnung in B entwickelt, so ergibt sich[4]:

0. Harmonische

$$\begin{aligned}\bar{x} &= g\frac{\kappa^2}{\left|\widetilde{\Delta}\right|^2} + g\frac{\kappa^2}{4}\left(\frac{\kappa B}{\Omega}\right)^2\left(\frac{1}{\left(\mathrm{i}\widetilde{\Delta}+\mathrm{i}\Omega\right)\left(-\mathrm{i}\widetilde{\Delta}^*-\mathrm{i}\Omega\right)}\right) \\ &\quad + g\frac{\kappa^2}{4}\left(\frac{\kappa B}{\Omega}\right)^2\left(\frac{1}{\left(\mathrm{i}\widetilde{\Delta}-\mathrm{i}\Omega\right)\left(-\mathrm{i}\widetilde{\Delta}^*+\mathrm{i}\Omega\right)}\right)\end{aligned} \tag{A.5}$$

1. Harmonische

$$\frac{B}{2}\left(1-\Omega^2-\mathrm{i}\gamma\Omega\right) = g\left(\alpha_{-1}\alpha_0^* + \alpha_0\alpha_1^*\right) + g\left(\alpha_{-2}\alpha_{-1}^* + \alpha_1\alpha_2^*\right) \tag{A.6}$$

Für den Realteil:

$$\begin{aligned}\frac{\left(1-\Omega^2\right)}{2} &= -\frac{g^2\kappa^2}{2\Omega\left|\widetilde{\Delta}\right|^2}\cdot\mathrm{Re}\left(\frac{\widetilde{\Delta}^*}{\widetilde{\Delta}^*+\Omega} - \frac{\widetilde{\Delta}}{\widetilde{\Delta}-\Omega}\right) \\ &\quad + \frac{g^4\kappa^2B^2}{16\Omega^3}\mathrm{Re}\left[\left(\frac{1}{-\mathrm{i}\widetilde{\Delta}^*+\mathrm{i}\Omega}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{i}\widetilde{\Delta}-2\mathrm{i}\Omega}\right)\right] \\ &\quad - \frac{g^4\kappa^2B^2}{16\Omega^3}\mathrm{Re}\left[\left(\frac{1}{\mathrm{i}\widetilde{\Delta}+\mathrm{i}\Omega}\right)\left(\frac{1}{-\mathrm{i}\widetilde{\Delta}^*-2\mathrm{i}\Omega}\right)\right]\end{aligned} \tag{A.7}$$

Für den Imaginärteil:

$$\begin{aligned}-\frac{\gamma\Omega}{2} &= -\frac{g^2\kappa^2}{2\Omega\left|\widetilde{\Delta}\right|^2}\cdot\mathrm{Im}\left(\frac{\widetilde{\Delta}^*}{\widetilde{\Delta}^*+\Omega} - \frac{\widetilde{\Delta}}{\widetilde{\Delta}-\Omega}\right) \\ &\quad + \frac{g^4\kappa^2B^2}{16\Omega^3}\mathrm{Im}\left[\left(\frac{1}{-\mathrm{i}\widetilde{\Delta}^*+\mathrm{i}\Omega}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{i}\widetilde{\Delta}-2\mathrm{i}\Omega}\right)\right] \\ &\quad - \frac{g^4\kappa^2B^2}{16\Omega^3}\mathrm{Im}\left[\left(\frac{1}{\mathrm{i}\widetilde{\Delta}+\mathrm{i}\Omega}\right)\left(\frac{1}{-\mathrm{i}\widetilde{\Delta}^*-2\mathrm{i}\Omega}\right)\right]\end{aligned} \tag{A.8}$$

Bevor nun mit der numerisch durchgeführten Lösung dieser 3 Gleichungen begonnen wird, soll zunächst wieder die Leistungsbilanz analytisch behandelt werden, um die Schwellen γ_s und Δ_s zu finden. Dazu wird wieder eine Größe θ definiert, die die Bedingung für das Vorhandensein einer Lösung B liefert. In

[4] Die nächsthöhere Ordnung in B wäre die vierte.

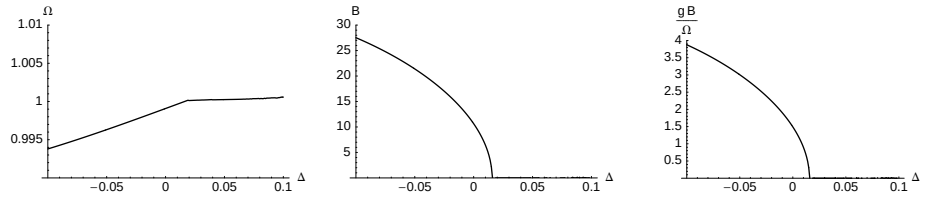

Abbildung A.5: Lösungen bei der Schwelle Δ_s, wo das Besselargument klein und somit die Näherung gerechtfertigt ist

Gl.(A.8) erkennt man sofort den Teil, der parabolisch in B ist. Daher kann man für Lösbarkeit der Gleichung einfach fordern

$$\theta := \frac{\gamma\Omega}{2} - \frac{g^2\kappa^2}{2\Omega\left|\widetilde{\Delta}\right|^2} \cdot \mathrm{Im}\left(\frac{\widetilde{\Delta}^*}{\widetilde{\Delta}^* + \Omega} - \frac{\widetilde{\Delta}}{\widetilde{\Delta} - \Omega}\right) \overset{!}{<} 0.$$

Wieder erhält man für diese Analyse qualitativ das gleiche Ergebnis wie in den vorherigen Abschnitten. Konkret liefert die Überlegung $g_s = 0.0145$, $\gamma_s = 9.4 \cdot 10^{-3}$ und $\Delta_s = 0.0052$, was bis auf den Wert für Δ_s gut mit den Ergebnissen der Simulation übereinstimmt. Die Schwellen für die Verstimmung bei γ in Schwellennähe ergeben sich zu $\Delta_{s1} \approx -0.87$ und $\Delta_{s1} \approx -0.54$.

Gemeinsame Lösung von Real- und Imaginärteil nach Ω und B

Die beiden Gleichungen (A.7) und (A.8) werden numerisch nach Ω und B gelöst. Dies bietet sich an, da für $\bar{x}$ die entsprechend angepassten Ergebnisse aus Abschnitt (A.1), 0. Ordnung in B verwendet werden können. Dabei wird iterativ der Systemparameter Δ verändert.

Schwelle Δ_s Die Lösungen für Ω und B werden hier (in Abb. A.5) als Funktion der Verstimmung auftragen. Zusätzlich wird noch das Besselargument gezeigt.

Es werden auch Konturplots (Abb. A.6) für die Gleichungen für Real- und Imaginärteil im Phasenraum der beiden Parameter Ω und B erstellt. Nimmt man die Struktur dieser Konturen als fest an, dann bestimmt also der Realteil, die Energiebilanz, durch die Lage der vertikalen Kontur im wesentlichen Ω, während der Imaginärteil, also die Leistungsbilanz, durch die Neigung der schrägen Konturen B bestimmt.

Dies stimmt mit den vorangegangenen analytischen Überlegungen überein. In [10] war sogar eine zentrale Annahme, dass $\Omega_0 = \Omega$ gilt. Dort wurde bei der Analyse die Gleichung für den Realteil gar nicht verwendet. Hier kann diese Annahme nun plausibilisiert werden.

Schwellen Δ_{s1} und Δ_{s2}: In der Nähe von γ_s wird wieder zusätzlich die Verstimmung Δ variiert. Es ist nicht verwunderlich, dass sich, wie in Abb. A.7 zu sehen, nur in einem engen Bereich der Verstimmung ein Grenzzyklus zeigt.

Man erkennt, dass die Ergebnisse nur einigermaßen mit denen aus der Simu-

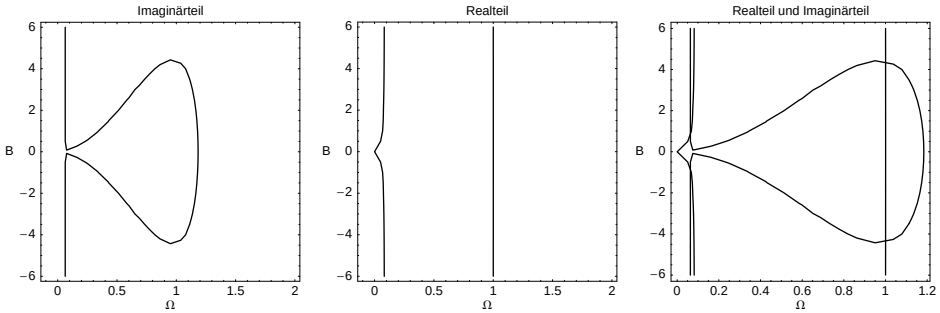

Abbildung A.6: Konturplots für $\Delta = 0.013$ ($\bar{x} = 0.1399$). Links der Imaginärteil, in der Mitte der Realteil, und rechts eine Überlagerung von beiden, an der man die Lösungen ablesen kann.

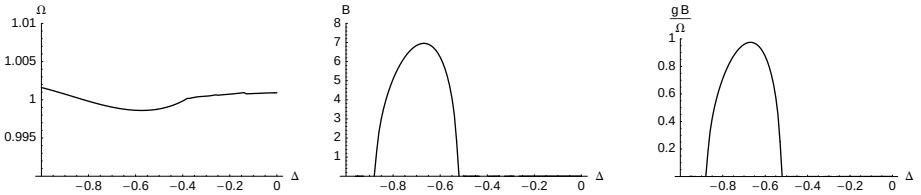

Abbildung A.7: Lösung für Ω und B sowie das Besselargument für $\gamma = 0.009$ als Funktion von Δ

lation übereinstimmen; Das ist aber verständlich, da das Besselargument nicht sehr viel kleiner als eins ist. Insofern ist die Näherung auch für diese Parameter nicht gut gerechtfertigt.

0. und 1. Harmonische: Gemeinsame Bestimmung von $\bar{x}$, Ω und B

Weiter kann aus den Gleichungen (A.5), (A.7) und (A.8) für Parametersatz E gemeinsam numerisch die Lösungen für $\bar{x}$, Ω und B bestimmt werden. Die Ergebnisse decken sich mit denen des vorherigen Abschnitts.

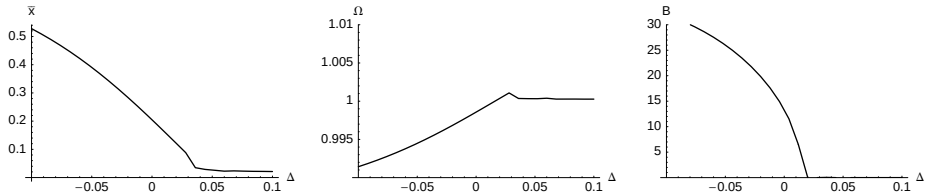

Abbildung A.8: Lösung für $\bar{x}$, Ω und B bei der Schwelle Δ_s

Literaturverzeichnis

[1] O. Arcizet, P.-F. Cohadon, T. Briant, M. Pinard, and A. Heidmann. Radiation-pressure cooling and optomechanical instability of a micromirror. *Nature*, 444:71–74, 2006.

[2] T. Carmon, H. Rokhsari, l.Yang, T. J. Kippenberg, and K. J. Vahala. Temporal behavior of radiation-pressure-induced vibration of an optical microcavity phonon mode. *Physical Review Letters*, 94:223902, 2005.

[3] C. W. Gardiner and P. Zoller. *Quantum Noise*. Springer, 2000.

[4] S. Gigan, H. R. Böhm, M. Paternostro, F. Blaser, G. Langer, J. B. Hertzberg, K. C. Schwab, D. Bäuerle, M. Aspelmeyer, and A. Zeilinger. Self-cooling of a micromirror by radiation pressure. *Nature*, 444:67–70, 2006.

[5] V. Giovannetti and D. Vitali. Phase-noise measurement in a cavity with a movable mirror undergoing quantum brownian motion. *Physical Review A*, 63:023812, 2001.

[6] M. Hossein-Zadeh, H. Rokhsari, A. Hajimiri, and K. J. Vahala. Characterization of a radiation-pressure-driven micromechanical oscillator. *Physical Review A*, 74:023813, 2006.

[7] C. K. Law. Interaction between a moving mirror and radiation pressure: A hamiltonian formulation. *Physical Review A*, 51:2537–2541, 1995.

[8] S. Mancini, V. Giovannetti, D.Vitali, and P. Tombesi. Entangling macroscopic oscillators exploiting radiation pressure. *Physical Review Letters*, 88:120401, 2002.

[9] S. Mancini and P. Tombesi. Quantum noise reduction by radiation pressure. *Physical Review A*, 49:4055–4065, 1994.

[10] F. Marquardt, F. G. E. Harris, and S. M. Girvin. Dynamical multistability induced by radiation pressure in high-finesse micromechanical optical cavities. *Physical Review Letters*, 96:103901, 2006.

[11] A. Pikovski, M. Rosenblum, and J. Kurths. *Synchronisation*. Cambridge University Press, 2001.

[12] H. Risken. *The Fokker-Planck Equation*. Springer, 1989.

[13] H. Rokhsari, T. J. Kippenberg, T. Carmon, and K. J. Vahala. Radiation-pressure-driven micro-mechanical oscillator. *Optics Express*, 13:5293–5301, 2005.

[14] W. P. Schleich. *Quantum Optics in Phase Space*. Wiley-VCH, Berlin, 2001.

[15] M. O. Scully and M. S. Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997.

[16] R. L. Stratonovich. *Topics in the Theory of Random Noise*, volume 1. Gordon and Breach, 1967.

[17] R. L. Stratonovich. *Topics in the Theory of Random Noise*, volume 2. Gordon and Breach, 1967.

[18] D. Vitali, S. Gigan, A. Ferreira, H. R. Böhm, P. Tombesi, A. Guerreiro, V. Vedral, A. Zeilinger, and M. Aspelmeyer. Optomechanical entanglement between a movable mirror and a cavity field. *Physical Review Letters*, 98:030405, 2007.

[19] D. F. Walls and G. J. Milburn. *Quantum Optics*. Springer, 1994.