Theoretische Physik IV
- Quanten II -

Übungsblatt 4 (20 Punkte)
Ausgabe 30.04.08 – Abgabe 08.05.08 – Besprechung n.V.

▷ Aufgabe 1 (Kontaktpotential und MBA) (4 Punkte)

In der "most brutal approxiamtion" (MBA) der Teilchenstreuung wird das physikalische Potential der Wechselwirkung des Projektils mit dem Target durch ein sog *Kontaktpotential* ersetzt,

$$V(\hat{\vec{q}}) \to \frac{2\pi\hbar^2}{m} a_0 \delta(\hat{\vec{q}} - \vec{r}) \tag{1}$$

worin m die reduzierte Masse, $\vec{r}$ der Ort des Targets, $\hat{\vec{q}}$ der Ortsoperator des Projektils, und es wird die Streuampltitude (bzw der Streuquerschnitt) in erster Bornscher Näherung berechnet.

- Vollziehen Sie die Rechnung und beantworten Sie die Frage nach der Bedeutung des Parameters a_0.
- Versuchen Sie nun, die Streuamplitude (bzw. den Strequerschnitt) für das Kontaktpotential exakt zu berechnen. Beispielsweise durch Lösung der Lippmann-Schwinger-Gleichung.
- Habe Sie das Gefühl, dass hier irgendwas nicht stimmt? Erörtern Sie Ihre Gefühlslage.

▷ Aufgabe 2 (Streuung am Kristall) (6 Punkte)

Die Streuung von Neutronen o.ä. an einem Kristall kann gut in Bornscher Näherung beschrieben werden. Das Wechselwirkungspotential ist

$$V(\hat{\vec{q}}) = \sum_\alpha v(\hat{\vec{q}} - \vec{r}^{(\alpha)}) \tag{2}$$

worin v das Wechselwirkungspotential des Neutrons mit einem Atom, $\hat{\vec{q}}$ der Ortsoperator des Neutrons, und $\vec{r}^{(\alpha)}$ der Ort des α-ten Atoms im Kristallverband. Die Atome seien alle gleich, das Kristallgitter einfach

$$\vec{r}^{(\alpha)} = n_1^{(\alpha)}\vec{a}_1 + n_2^{(\alpha)}\vec{a}_2 + n_3^{(\alpha)}\vec{a}_3 \tag{3}$$

worin $\vec{a}_i$ die primitiven Basivektoren (nicht notwendig orthogonal) und $n_i^{(\alpha)}$ ganze Zahlen, die Komponenten von $\vec{r}^{(\alpha)}$ in der Basis $\vec{a}_i$.

Berechnen Sie die Streuanmplitude und den Streuquerschnitt in Bornscher Näherung. Wie lautet das Resultat unter Verwendung eines Kontaktpotentials $v = (2\pi\hbar^2/m)a_0\delta(\hat{\vec{q}} - \vec{r}^{(\alpha)})$? Fertigen Sie ein paar aussagekräftige Skizzen, die Sie gut im F-Praktikum einsetzen können.

▷ **Aufgabe 3 (Streuphasen für die Streuung an der harten Kugel)** (10 Punkte)

Das Problem der quantenmechanischen Streuung an der harten Kugel ist zu Recht ein Klassiker der Streutheorie.

(a) Geben Sie die Lösungen der Radialgleichung für die Streuung an der unendlich harten Kugel vom Radius d. Bestätigen Sie insbesondere die Bestimmungsgleichung für die Streuphasen,

$$\tan(\delta_\ell) = \frac{j_\ell(kd)}{n_\ell(kd)}\,. \tag{4}$$

(b) Zeigen Sie, dass für s-Wellenstreuung

$$\delta_0 = -kd \bmod \pi\,, \tag{5}$$

Wie groß sind Streulänge und effektive Reichweite?

(c) Analysieren Sie der Grenzfall niedriger Energien und verifizieren Sie

$$\delta_\ell \overset{kd\to 0}{\sim} (kd)^{2\ell+1} \to 0\,. \tag{6}$$

Wie groß sind Streulänge und effektive Reichweite für die l-Wellenstreueung?

(d) Analysieren Sie den Grenzfall hoher Energien und verifizieren Sie

$$\sigma_{\rm tot} \overset{kd\to\infty}{\sim} 2\pi d^2 \tag{7}$$

Hinweis: Das ist ein zugegebenermaßen ein wenig fummelig ...

(e) Der Streuquerschnitt erscheint im Hochenergie-Limes doppelt so groß wie der klassische (=geometrische) Streuquerschnitt – und das obwohl man immer sagt, dass im Grenzfall großer Energien (bzw Wirkung) die Quantenmechanik in die klassiche Mechanik übergeht (wonach ein Streuquerschnitt πt_0^2 zu erwarten wäre). Lösen sie dieses (scheinbare) Paradox. Hinweis: "Klassikalität" erfordert insbesondere, dass sich die äßeren Bedingungen auf der Skala der DeBroglie-Wellenlänge nur langsam ändern. Ob das wohl für das Potential der harten Kugel zutrifft?