Theoretische Physik III – Quantenmechanik I (SS09)

Übungsblatt 01 ($20 + \pi$ Punkte) [1]

Ausgabe 20.04.09 – Abgabe 29.04.09 – Besprechung n.V.

▷ Aufgabe 1 (Compton-Effekt) (3 Punkte)

Bei der Streuung von Licht an einem freien Teilchen der Ruhemasse m erleidet das gestreute Licht eine Frequenzverschiebung. Für ein Teilchen das anfänglich ruht lautet der Ausdruck für die entsprechende Wellenlängen-Differenz

$$\lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \tag{1}$$

wobei λ' die Wellenlänge des gestreuten Lichtes, ϑ die Beobachtungsrichtung relativ zur Richtung des einfallenden Lichtes, und $\lambda_c \equiv 2\pi\hbar/(mc)$ die sog. *Compton-Wellenlänge* des Teilchens bezeichnet.

(a) Beweisen Sie Gl. (1) indem Sie die Streuung als relativistischen Stoß zwischen einem Photon und einem ruhenden Teilchen modellieren.

(b) Würdigen Sie das Ergebnis indem Sie sich davon überzeugen, daß nach den Gesetzen der klassischen Elektrodynamik *keine* Frequenzverschiebung zu erwarten ist.

Bemerkung: Der Effekt wurde 1923 von Compton entdeckt und in Zusammenarbeit mit Debeye auf der Basis der Einsteinschen Photonenvorstellung erklärt.

▷ Aufgabe 2 (Darstellungswechsel) (4 Punkte)

Ein Teilchen, das sich in einer Raumdimension bewegt, sei in einem Zustand präpariert der sich in der Impulsdarstellung liest

$$\tilde{\psi}(k) = \begin{cases} c & a \leq k \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2}$$

(a) Wie muss c gewählt werden, damit $\tilde{\psi}$ korrekt normiert? Berechnen Sie Mittelwert und Streuung der Messgröße Impuls. (1 Punkt)

(b) Bestimmen Sie die Wellenfunktion in der Ortsdarstellung. Machen Sie sich ein Bild der entsprechenden Wahrscheinlichkeitsdichte! Berechnen Sie Mittelwert und Streuung der Messgröße Ort. Welcher Unschärferelation genügt das Produkt aus Orts- und Impulsstreuung? (2 Punkte)

▷ Aufgabe 3 (Lineares Molekül) (6 Punkte)

In einem einfachen Modell eines linearen Moleküls kann sich das Leuchtelektron effektiv nur in einer Dimension bewegen. Der Konfiguratinsraum des Elektrons ist das Intervall $X = [-a/2, a/2]$, seine Wellenfunktion von der Form

$$\psi(x,t) = c_0 e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}\varphi_0(x) + c_1 e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\varphi_1(x)\,, \tag{3}$$

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

worin c_0, c_1 komplexe Zahlen, und φ_0, φ_1 sog *Orbitale*

$$\varphi_0(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos(\pi x/a)\,, \qquad \varphi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(2\pi x/a)\,. \tag{4}$$

(a) Bestätigen Sie, dass

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1 \tag{5}$$

die Normierung garantiert.

(a) Beschreiben Sie – in Worten – wo das Elektron im Fall $c_1 = 0$ bzw. $c_0 = 0$ vornehmlich angefunden wird.

(b) Bestätigen Sie, dass im allgemeinen Fall die W'keitsdichte für eine Ortmessung

$$|\psi(x,t)|^2 = |c_0|^2|\varphi_0(x)|^2 + |c_1|^2|\varphi_1(x)|^2 + c_0^* c_1 e^{-\frac{i}{\hbar}(E_1-E_0)t}\varphi_0^*(x)\varphi_1(x) + c_0 c_1^* e^{+\frac{i}{\hbar}(E_1-E_0)t}\varphi_0(x)\varphi_1^*(x)\,. \tag{6}$$

Welcher der Terme verschließt sich einer klassischen Interpretation "hat mit W'keit $|c_0|^2$ eine Dichte $|\varphi_0(c)|^2$ und mit W'keit $|c_1|^2$ eine Dichte $|\varphi_1(x)|^2$"?

(c) Für $c_0 c_1 \neq 0$ oszilliert die W'keitsdichte als Funktion der Zeit. Mit welcher Frequenz? Machen Sie sich ein Bild für den Spezialfall $\alpha_0 = \alpha_1 = 1/\sqrt{2}$ indem Sie die W'keitsdichte zu einigen aussagekräftigen Zeitpunkten t_i plotten.

(d) Berechnen Sie den Mittelwert und die Varianz der Ortsverteilung. Mittelwert und Varianz sind zeitabhängig. Machen Sie sich ein Bild (Plot!) für den Spezialfall $c_0 = c_1 = 1/\sqrt{2}$.

(e) Bestimmen Sie nun die Wellenfunktion und W'keitsdichte in der Imuldarstellung. Beachten Sie, dass der Konfigurationsraum das Intervall $[-a/2, a/2]$, außerhalb dieses Intervalls also $\psi(x,t) = 0$.

(f) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Impulsverteilung. Plotten Sie Ihr Resultat fr den in (c) angegebenen Spezialfall. Was ergibt sich für das Produkt der Orts- und Impulvarianz?

▷ Aufgabe 4 (Delta-"Funktion") (3 Punkte)

Aus Sicht des/der Physikers/Physikerin ist die Distribution $\delta_a[f] = f(a)$ eine "Funktion" mit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)f(x)dx = \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \delta(x)f(x)dx = f(a)\,, \qquad \epsilon > 0\,, \tag{7}$$

wobei $f(x)$ eine hinreichend glatte "Testfunktion" ist.[2]

(a) Machen Sie sich ein Bild von $\delta(x-a)$. Wenn x die physikalische Dimension "Länge" hat – welche physikalische Dimension hat $\delta(x)$? (1 Punkt)

[2] Falls Sie hier nur Bahnhof verstehen: konsultieren Sie die "Mathematischen Bissen – Deltafunktion", die Sie auf der Kurs-Webseite finden.

(b) Zeigen Sie für eine Funktion $g(x)$, die N einfache Nullstellen x_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ besitzt: (1 Punkt)

$$\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\left|\frac{dg}{dx}(x_i)\right|} \delta(x - x_i)\,. \tag{8}$$

(c) Zeigen Sie für $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$: (1 Punkt)

$$\begin{aligned} \delta(cx) &= \frac{1}{|c|}\delta(x) \\ \delta(x^2 - a^2) &= \frac{1}{2|a|}\left\{\delta(x+a) + \delta(x-a)\right\} \end{aligned}$$

▷ **Aufgabe 5 (Fouriertransformation)** (4 Punkte)

Die Fouriertransformierte einer komplex- oder reellwertigen Funktion $x \mapsto f(x)$ ist definiert

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-ikx} f(x) \tag{9}$$

Zeigen Sie:

(a) Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : f(\cdot) \mapsto \tilde{f}(\cdot)$ ist *linear*. Die *Umkehrtransformation* ist gegeben durch (1 Punkt)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} \tilde{f}(k) \tag{10}$$

<u>Hinweis:</u> Machen Sie Gebrauch von der Masteridentität der theoretischen Physik

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} = 2\pi\delta(x - x')\,. \tag{11}$$

Könnten Sie die beweisen?

(b) Die Fouriertransformation ist *isometrisch* (1 Punkt)

$$\int f^*(x) g(x) dx = \int \tilde{f}^*(k) g(k) dk \tag{12}$$

(c) Ableitungen haben einfache Fouriertransformierte, (1 Punkt)

$$g(x) := f'(x) \quad \Longrightarrow \quad \tilde{g}(k) = ik\tilde{f}(k) \tag{13}$$

(d) Ein Beispiel: Gegeben die Funktion

$$f(x) = \cos(k_0 x + \varphi) e^{-x^2/(2\sigma^2)}\,. \tag{14}$$

Berechnen Sie die Fouriertransformierte. Machen Sie sich ein Bild von f und der Fouriertransformierten $\tilde{f}$. (1 Punkt)

▷ **Aufgabe 6 (Ein unmoralisches Angebot)** (π Punkte)

Aus dem Internet erreicht Sie ein Angebot für ein gezinktes Glücksrad, spezifiziert durch eine angebliche Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho(\varphi) = \frac{1}{4}\left[\sin(\varphi/2) - \frac{1}{2}\sin\varphi\right], \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \tag{15}$$

zum Schnäppchenpreis von 99 Euro. Sie sind von der Aussicht, Ihre Bekannten beim Glückspiel übers Ohr zu hauen fasziniert, wollen aber sicher stellen, dass sich Ihre Investition auch lohnt.

- Handelt es sich bei (15) tatsächlich um eine Wahrscheinlichkeitsdichte (positiv? normiert?)? Vielleicht machen Sie sich ein Bild von $\rho(\varphi)$?
- Das Glücksrad kommt mit 64 Teilungsnägeln, alle im gleichen Abstand, einer bei $\varphi = 0$. Die entsprechenden Abschnitte sind durchnummeriert von 1 bis 64. Gespielt wird, indem man eine Zahl tippt, etwa *15*. Bleibt das Rad auf 15 stehen, hat man gewonnen, andernfalls hat man verloren. Im Falle eines Gewinns erhält man bei einem Einsatz von 1 Euro eine Auszahlung von 63 Euro (von der Bank).[3] Auf welche Zahl werden Sie setzen?
- Angenommen Sie haben das gezinkte Glücksrad gekauft und veranstalten nun fleissig Spieleabende mit Ihren Bekannten. Reihum übernimmt jeder Mitspieler mal für einen Abend die Bank. Gewinnt die Bank im Mittel? Wie sieht es mit Ihnen aus? Als einziger Mitspieler kennen Sie (15). Wie lange dauert es im Mittel, bis sich Ihre Investition amortisiert hat?

[3] Richtig! Langfristig gewinnt bei einem fairen Glcksrad immer die Bank (im Mittel einen Euro in 64 Spielen). Die hat ja auch Auslagen (Öl fürs Rad, Personal etc).