Theoretische Physik III – Quantenmechanik I (SS09)

Übungsblatt 02 ($20 + e + \pi$ Punkte) [1]

Ausgabe 29.04.09 – Abgabe 06.05.09 – Besprechung n.V.

▷ Aufgabe 1 (Teilchen in der Kiste) (5 Punkte)

Ein Teilchen sei in einer würfelförmigen Kiste der Kantenlänge L frei beweglich eingeschlossen.

(a) Bestimmen Sie die Energieniveaus und Eigenfunktionen. Zeigen Sie, daß die Energie-Eigenwerte (Energieniveaus) durch die Gleichung

$$E_{klm} = \epsilon \left((l+1)^2 + (m+1)^2 + (n+1)^2 \right) , \qquad l, m, n = 0, 1, 2, \dots , \tag{1}$$

mit $\epsilon = \hbar^2 \pi^2 / (2mL^2)$ gegeben sind, und die dazugehörigen Energie-Eigenfunktionen

$$\varphi_{klm}(x, y, z) = \left[\frac{2}{L} \right]^{\frac{3}{2}} \sin(k_l x) \sin(k_m y) \sin(k_n z) , \qquad k_l = \frac{(l+1)\pi}{L} \text{ etc} , \tag{2}$$

wobei die Kiste mit der unteren Ecke links vorne im Koordinatenursprung plaziert. (2 Punkte)

(b) Welchen Druck übt das Teilchen im Grundzustand auf die Wände aus? (1 Punkt)
Zur Erinnerung: "Druck" ist "Kraft pro Fläche". "Kraft" ist "Arbeit pro Wegstrecke", und "Arbeit" ist sowas wie Energie. Bestimmen Sie also zunächst die Änderung der Grundzustandsenergie bei infinitesimaler Verschiebung einer der Wände.

(c) Wie groß dürfte $\hbar$ allenfalls sein, um beim Öffnen handelsüblicher Melonen nicht in Lebensgefahr zu geraten?[2] (1 Punkt)

(d) Überzeugen Sie sich davon, dass (i) die Energie-Niveaus um so dichter beieinander liegen, je größer die Kiste ist, und (ii) je höher die Energie, desto mehr Niveaus befinden sich in ihrer Nachbarschaft. Man sagt, im Grenzfall $L \to \infty$ entstehe ein quasi-kontinuierliches Energiespektrum. Bestimmen Sie für diesen Fall die Zustandsdichte, d.h. die Zahl der Niveaus, deren Energie im Energie-Intervall dE um E liegt. (1 Punkt)

▷ Aufgabe 2 (Teilchen auf dem Kreis I) ($6 + \pi$ Punkte)

Wir betrachten ein freies Teilchen in einer räumlichen Dimension – nur dass diese Dimension zu einem Kreis mit Umfang a aufgewickelt ist. Die verallgemeinerte Koordinate ist periodisch mit Periodenintervall $[0, a]$. Mit m die Masse des Teilchens lautet die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2m} \tag{3}$$

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

[2] Als theoretische Physikerin dürfen Sie annehmen, dass handelsübliche Melonen würfelförmig sind.

Bevor Sie loslegen ist es vielleicht ganz nützlich einmal die klassischen Bewegungsgleichungen aufzustellen und für allgemeinen Anfangsbedingungen zu lösen (man beachte die Periodizität der Koordinate q).

Die quantisierte Version unseres Systems erhält man in der sog "kanonischen Weise". Der Ortsoperator $\hat{q}$, erklärt $(\hat{q}\psi)(x) = x\psi(x)$, und Impulsoperator $\hat{p}$, erklärt $(\hat{p}\psi)(x) = \frac{\hbar}{i}\psi'(x)$, bilden ein konjugiertes Paar mit Heisenbergkommutator

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar\,. \tag{4}$$

Der Hilbertraum unseres Systems ist der Raum der quadratintegrablen Funktionen über dem Periodenintervall $[0, a]$, also $\mathcal{H} = \{\psi \in \mathcal{L}^2([0, a], dx) | \psi(0) = \psi(a)\}$. Hamiltonoperator wie in (3) nur halt H und p mit Hut auf dem Kopf.

(a) Zeigen Sie: Die stationäre Schrödingergleichung $\hat{H}\psi = E\psi$ auf $\mathcal{H}$ wird gelöst(2 Punkte)

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}\,, \qquad \varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{ik_n x} \tag{5}$$

worin k_n Wellenzahl

$$k_n = \frac{2\pi}{a} n\,, \qquad n = 0, \pm 1, \ldots\,. \tag{6}$$

(b) Die φ_n bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$, also (2 Punkte

$$\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = \delta_{mn}\,, \tag{7}$$

$$\underset{\psi \in \mathcal{H}}{\forall} \|\psi\|^2 = \sum_n |\langle \varphi_n, \psi \rangle|^2\,. \tag{8}$$

<u>Hinweis:</u> Hier dürfen Sie ruhig Ihr Mathe-Skript, Stichwort Fourierreihen, zu Rate ziehen.

(c) Der Impulsoperator hat Eigenwerte und Eigenvektoren. Welche sind das? (2 Punkt)

(d) Auf ganz $\mathcal{H}$ ist der Impuloperator sicherlich nicht beschränkt (Beweis?), nach einem Satz der Funktionalanalyis daher auch nicht stetig, und das sogar nirgends. Klingt furchtbar, ist aber nicht so schlimm. Viel wichtiger ist, ob sich eine in $\mathcal{H}$ dicht liegende Menge von Funktionen finden lässt, auf der der Impulsoperator selbstadjungiert ist. Zeigen Sie, dass das der Fall ist, und charakterisieren Sie diese Menge. (e Punkte)

▷ Aufgabe 3 (Teilchen auf dem Kreis I) (4 Punkte)

Das Teilchen aus Aufgabe (2) sei nun zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand

$$\Psi(x, t = 0) = \alpha\varphi_0(x) + \beta\varphi_1(x) + \gamma\varphi_{-1}(x) \tag{9}$$

präpariert, wobei $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$ (warum?).

(a) Welche Bedeutung haben die Koeffizienten α, β, γ? (2 Punkte)
Hinweis: Denken Sie an eine Energie-, eine Impuls- und eine Orts-Messung. Füllen Sie die Lücken in den Sätzen: 1. "Mit den W'keiten [Lücke] werden die Werte [Lücke] an einem Energiemessgerät abgelesen"; 2. "Mit den W'keiten [Lücke] werden die Werte [Lücke] an einem Impulsmessgerät abgelesen"; 3. "Mit der W'keit [Lücke] wird der Wert [Lücke] an einem Ortsmessgerät, das nach Anwesenheit in dx bei x_0 fragt, abgelesen".

Folgend der Präparation im Zustand wie unter Gl. (9) beschrieben, entwickelt sich der Zustand gemäß der Schrödingergleichung $i\hbar\dot{\Psi} = \hat{H}\Psi$. Zum Zeitpunkt $t = T$ werde nun eine Messung ausgeführt.

(b) Füllen Sie die Lücken in den unter (a) Hinweise gegebenen Sätzen. Bei welcher Messung hängen die Resultate offensichtlich nicht vom Zeitpunkt T ab? Warum nicht? (2 Punkte)

▷ Aufgabe 4 (Rechenregeln Operatoren) (5 Punkte)

Bestätigen Sie die folgenden Rechenregeln für Operatoren. Fragen nach Definitionsbereichen dürfen Sie im ersten Anlauf non-chalant ignorieren ....

$$(\alpha\hat{A})^\dagger = \alpha^*\hat{A}^\dagger \tag{10}$$

$$(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger \tag{11}$$

$$[\hat{A}, \hat{B}]^\dagger = [\hat{B}^\dagger, \hat{A}^\dagger] \tag{12}$$

$$(\hat{A}\hat{B})^{-1} = \hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1} \tag{13}$$

$$(\hat{A}^\dagger)^{-1} = (\hat{A}^{-1})^\dagger \tag{14}$$

▷ Aufgabe 5 (Quantendiffusion) (π Punkte)

Ihr Freund ist besorgt. Er schläft in einem Hochbett und befürchtet, aufgrund der Quantendiffusion seines Wellenpaketes (vgl. Aufgabe 1!) morgens auf dem Boden aufzuwachen (möglicherweise, so seine konkrete Befürchtung, mit blauen Flecken).

(a) Versuchen Sie, Ihren Freund zu beruhigen.
Hinweis: Modellieren Sie Ihren Freund als Gauss'sches Wellenpaket. Benuzen Sie die Relation $m\Delta v^2/2 \sim k_\mathrm{B}T$, die Sie in der statistischen Mechanik kennenlernen werden, um die anfängliche Geschwindigkeits-Unschärfe Ihres Freundes der Masse m mit seiner Körpertemperatur T in Beziehung zu setzen (k_B ist die Boltzmann-Konstante).

(b) Wie lange müsste Ihr Freund gewohnheitsmäßig schlafen, um im Mittel jedes zweite mal neben seinem Bett aufzuwachen?

(c) Geben Sie eine Einschätzung ob die unter (b) gefundene Antwort realistisch erscheint. Begründen Sie Ihre Einschätzung. Sollten Sie zum Schluss kommen "unrealistisch" – woran könnte das liegen, also: an welcher Stelle ist das Modell inadequat?