– Gruppentheorie für PhysikerInnen –

Übungsblatt 1

Ausgabe: 18.04.11 – Abgabe: 6.5.11 – Besprechung: n.V.

Aufgabe 1

Es sei $\mathbb{N}_0 = 0, 1, 2, ...$ die Menge der natürlichen Zahlen inclusive 0, jemand behauptet $(\mathbb{N}_0, +, 0)$ bildet eine Gruppe. Stimmt das?

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Dimension der generellen linearen Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie: Die Dimension der $\mathrm{SU}(n)$ ist $r = n(n+1)/2$.

Aufgabe 4

Zeigen Sie: Es gibt genau eine abstrakte Gruppe der Ordnung 3, und die ist isomorph zu C_3. Geben Sie eine Handvoll Realisierungen an.

Aufgabe 5

Zeigen Sie: Es gibt genau zwei abstrakte Gruppen der Ordnung 4, eine isomorph zu C_4, die andere isomorph zu $V_4 \simeq C_2 \otimes C_2$, der sog. *Klein'sche Vierergruppe*.

Aufgabe 6

Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\varphi : C_3 \longrightarrow C_3'; \qquad \varphi(e) = e', \quad \varphi(c) = c'^2, \quad \varphi(c^2) = c', \tag{0.1}$$

ist eine Automorphismus.

Aufgabe 7

Wir hatten in der Vorlesung die symmetrische Gruppe S_n eingeführt, deren Elemente Permutationen von n Objekten sind. In dieser Aufgabe beschränken wir uns auf die S_3, deren Elemente wir wie folgt darstellen

$$e = (123), \quad a_1 = (231), \ .... \ . \tag{0.2}$$

Die Notation ist dabei so zu verstehen, dass das Element $a = (ijk)$ angewendet auf die geordnete Menge A, B, C, das i'te Element nimmt und auf die erste Position verschiebt, das j'te Element wird dann auf die zweite Position verschoben und so weiter. Hier ein Beispiel:

$$a_1 = (231) \quad : \qquad \boxed{\mathrm{A}}\boxed{\mathrm{B}}\boxed{\mathrm{C}} \longrightarrow \boxed{\mathrm{B}}\boxed{\mathrm{C}}\boxed{\mathrm{A}}$$

(a) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente und schreiben Sie sie in der obigen Weise auf.

(b) Bestimmen Sie die Gruppentafel und zeigen Sie, dass die S_3 eine nicht abelsche Gruppe ist.

(c) Finden Sie alle Untergruppen von S_3.

(d) Bestimme Sie die Konjugationsklassen der S_3.

(e) Zeigen Sie das eine der Untergruppen ein echter Normalteiler ist.

(f) Bestimmen Sie die Faktorgruppe bzgl. des echten Normalteilers.

(g) Finden Sie einen surjektiven Homomorphismus

$$\varphi : S_3 \longrightarrow C_2, \tag{0.3}$$

sodass der echte Normalteiler der Kern des Homomorphismus ist.

Ohne Beweis sei hier angemerkt, dass der Kern eines surjektiven Gruppenhomomorphismus immer ein Normalteiler der Gruppe ist und der Abbildungsraum der Faktorgruppe bzgl. des Normalteilers entspricht, d.h.

$$\varphi : G \longrightarrow G', \text{mit } H = \ker(\varphi) \Rightarrow G' \simeq \frac{G}{H} \tag{0.4}$$