# Einführung in die Quantenoptik II

Sommersemester 2011

Carsten Henkel

**Problem set 2** Hand out: 27 Apr 2011 hand in: 27 Apr/11 May 2011

---

**Problem 2.1** – Meilensteine der Quantenoptik (10 points)

Recherchieren Sie die Original-Veröffentlichungen für einige bahnbrechende Ergebnisse der Quantenoptik. Teilen Sie sich in Gruppen auf und erstellen Sie in geeignetem Format eine “Literatur-Datenbank”, zu der alle Zugang haben.

A. Einstein unterscheidet zwischen stimulierter und spontaner Emission (1917).

P. A. M. Dirac quantisiert das elektromagnetische Feld und berechnet die Rate von spontaner Emission.

Einstein, Podolski und Rosen führen ein Gedankenexperiment mit verschränkten Teilchen durch.

Einer der London-Brüder erklärt mit Hilfe der Quantentheorie die van-der-Waals-Wechselwirkung (um 1930).

H. Bethe berechnet die Lamb-Verschiebung (1940er Jahre).

H. Casimir diskutiert die Vakuum-Energie zwischen spiegelnden Platten (1948).

Das Fluktuations-Dissipations-Theorem wird für Quantensysteme bewiesen (1951).

Th. Maiman führt den ersten Laser vor (1961).

E. Sudarshan erfindet die P-Darstellung; R. Glauber erfindet kohärente Zustände (um 1963, Nobelpreis 2005).

Mollow beobachtet das Mollow-Triplett.

A. Kastler (Paris) weist optisches Pumpen nach.

Im Fluoreszenzlicht einzelner Emitter wird anti-bunching beobachtet.

Hanbury Brown und Twiss untersuchen Intensitäts-Korrelationen im Licht von Sternen und messen den scheinbaren Stern-Durchmesser.

Th. Hänsch und A. Schawlow schlagen ein Verfahren zur Laserkühlung (“Dopplerkühlung”) vor (1975).

R. Loudon und P. Knight schreiben einen Übersichtsartikel über gequetschtes Licht.

Experimente am NIST (USA) weisen Temperaturen unterhalb des Doppler-Limits nach und werden an der ENS (Paris) theoretisch gedeutet (Nobelpreis 1997).

Unabhängig voneinander charakterisieren Lindblad, Gorini, Kossakowski und Sudarshan (?) die Generatoren von vollständig positiven Abbildungen (um 1976).

J. Bell stellt eine Form der nach ihm benannten Ungleichungen auf.

Die Horodecki-Familie leitet das PPT-Kriterium (positive partial transpose) für Verschränkung her.

**Problem 2.2** – Composite systems and operators (5 points)

In the lecture, we have started to look into density operators of composite systems. Start with the simplest situation of a pair of two-level atoms (A and B).
(1) Take the ordered basis $\{|\mathrm{e}\otimes\mathrm{e}\rangle, |\mathrm{e}\otimes\mathrm{g}\rangle, |\mathrm{g}\otimes\mathrm{e}\rangle, |\mathrm{g}\otimes\mathrm{g}\rangle\}$ and write down vector or matrix representations, as appropriate, for the following objects (notation from Quantum Optics I, ask us if not clear)

$$|\Psi\rangle = \frac{|\mathrm{e}\rangle + |\mathrm{g}\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |\mathrm{e}\rangle, \quad |\Psi\rangle\langle\Psi|, \quad \sigma_A \sigma_B^\dagger, \quad \sigma_{3,A}, \quad \mathrm{tr}_A|\Psi\rangle\langle\Psi|, \tag{2.1}$$

(2) The rule for expectation values in a mixed state, $\langle A\rangle = \mathrm{tr}(A\rho)$, is based in fact on a scalar product on the space of operators: $(A, B) := \mathrm{tr}(A^\dagger B)$. This generates a natural metric, the so-called Hilbert-Schmidt distance. For a single two-level atom, calculate the distances between the operators $\sigma$, $\sigma^\dagger$ and $\sigma_3$.

(3) A scalar product is called non-degenerate when: $(A, B) = 0$ for all $B$ if and only if $A = 0$. Show that this property suggests a proof for the following statement: the condition $\mathrm{tr}(K\rho) = \mathrm{tr}(\rho)$, valid for all density operators $\rho$, implies that $K = \mathbb{1}$. Is there still a loophole somewhere?

(4) [5 bonus points] Present to your student fellows the idea behind the paper "Quantum Discord and the Geometry of Bell-Diagonal States" by Matthias D. Lang and Carlton M. Caves, *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010) 150501.

**Problem 2.3** – The Stinespring dilation theorem (5 points)

Consider a quantum system in a mixed state (density operator $\rho$). The Stinespring dilation theorem says that by blowing up ("dilation") the Hilbert space, this can be represented as a pure state. Analyze how this construction works: take the eigenvectors $|\psi_k\rangle$ and eigenvalues $p_k$ of $\rho$, take a "notepad" system with states $|k\rangle$ and construct the state vector

$$|\Psi\rangle = \sum_k \sqrt{p_k}|\psi_k \otimes k\rangle \tag{2.2}$$

What is the reduced density operator that corresponds to $|\Psi\rangle$? What kind of measurements would be needed to tell the difference between the states $\rho$ and $|\Psi\rangle\langle\Psi|$?