Einführung in die Quantenoptik II Sommersemester 2012

Carsten Henkel

Problem set 3 Hand out: Wed 02 May 2012 hand in: Mon 21 May 2012

Problem 3.1 – Nakajima-Zwanzig Formel (8 points)

In der Vorlesung haben wir die folgende Vorschrift (nach Nakajima und Zwanzig) notiert:

$$\rho(0) \mapsto \rho(t) = \mathrm{tr}_B \left[U_{SB}(t) \rho(0) \otimes \rho_B U_{SB}^\dagger(t) \right] \tag{3.1}$$

Erstellen Sie eine Beschreibung in Worten dieser Konstruktion und beweisen Sie, dass es sich hierbei um eine vollständig positive Abbildung handelt.

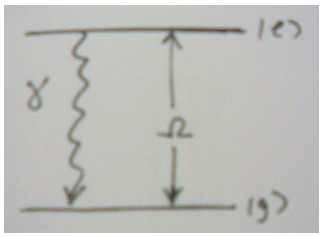
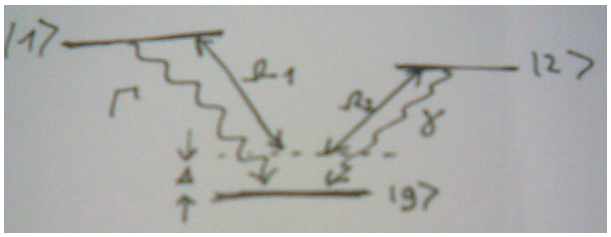
Schreiben Sie die Aufgabe elektronisch auf, indem Sie die Formatvorlagen einer physikalischen Zeitschrift benutzen. Halten Sie alle formalen Regeln für einen Artikel ein (siehe Hinweise für Autoren Ihrer gewählten Zeitschrift: Überschrift, Anschrift, Zusammenfassung, Haupttext, Literaturverzeichnis). Recherchieren Sie die Original-Literatur von Nakajima und Zwanzig und zitieren Sie diese in dem Format für Zitate (von der gewählten Zeitschrift festgelegt). Reichen Sie Ihre Aufgaben per Email an Dennis Rätzel ein.

Problem 3.2 – Equivalent Lindblad forms (5 points)

You are given a master equation with a Hamiltonian H and a set of Lindblad operators $L_k, L_k^\dagger$ ($k = 1 \ldots$). Show that the same master equation is obtained if the Lindblad operators are displaced by a c-number $L_k \mapsto L_k + a_k \mathbb{1}$, combined with the change in the Hamiltonian $H \mapsto H - (i/2) \sum_k \left(a_k^* L_k - a_k L_k^\dagger \right) + b$, where b is a real constant. This implies that the Lindblad operators can chosen to be traceless.

It may happen that a smaller set of Lindblad operators is sufficient to generate the same master equation. Take two Lindblad operators that are proportional to the same operator $L_k = r_k L$ ($k = 1, 2$). Show that the master equation generated by L_1 and L_2 (and their hermitean conjugates, of course) is equivalent to the master equation generated by rL and calculate r.

[5 bonus points] Generalize the previous example to the following procedure: Consider the matrix Λ with the elements $\Lambda_{kl} = \mathrm{tr}(L_l^\dagger L_k)$: it is hermitean and positive. Let U be a unitary matrix that brings Λ into a diagonal form by a similarity transformation, $\Delta = U \Lambda U^\dagger$. Compare the master equation generated by the set of Lindblad operators $K_l = \sum_k U_{lk} L_k$ ($l = 1 \ldots$).

Problem 3.3 – Graphical coding of master equations (7 points)

The following two sketches encode master equations for a two-level and for a three-level atom. Write them down, assuming that the rates γ and Γ represent spontaneous emission and Ω's represent Rabi frequencies. For the three-level atom, you need dipole operators for both transitions $|g\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ and $|g\rangle \leftrightarrow |2\rangle$. There is no standard notation for this.