

Theoretische Physik
- Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie (SoSe 2014) -
Übungsblatt 3
Emission 02.04.14 – Digestion 03.04.14

▷ **Aufgabe 1**

Man bestimme den Minkowskibetrag (genauer: Betragsquadrat) $a_\mu a^\mu$ der Viererbeschleunigung $a^\mu(\tau) := \frac{d^2 x^\mu(\tau)}{d\tau^2}$ und erörtere seine Bedeutung.

Hinweis: Die Beschleunigung $\vec{a} = \frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2}$ ist in der Newtonschen Theorie absolut, d.h. ihr Wert ist unter Galileitrafos invariant. Ob das wohl in der SRT auch so ist? Und wenn ja – was bedeutet das denn?

▷ **Aufgabe 2 (Tensor-Rechenregeln)**

“Tensor” ist ein zentraler Begriff der klassischen Feldtheorie. Für PhysikerInnen sind Tensoren Zahlenschemata mit “wohl bestimmtem Transformationsverhalten” unter Basiswechsel. Das Zahlenschema v^α , beispielsweise, bezeichnet Komponenten eines n -Vektors genau dann wenn unter einem Basiswechsel $e_\alpha \rightarrow e_{\alpha'}$, worin $e_\alpha = e_{\alpha'} L^{\alpha'}_\alpha$, die “neuen” Komponenten $v^{\alpha'} = L^{\alpha'}_\alpha v^\alpha$.

- (a) Gegeben ein Tensor vom Typ (p, q) (mit p oberen und q unteren Indices). Zeigen Sie dass die Verjüngung über ein schräg gestelltes Indexpaar ein Tensor vom Typ $(p - 1, q - 1)$.
- (b) Gegeben ein $n \times n$ Schema T^α_β von dem lediglich bekannt ist, dass die Kontraktion mit einem beliebigen kontravarianten Vektor v^β wiederum einen kontravarianten Vektor liefert. Zeigen Sie, dass notwendig T^α_β Komponenten eines Tensors vom Typ $(1, 1)$ sind.

Bemerkung: Satz (a) und Satz (b) sind beide beweisbedürftig, da sie in der ART permanent zum Einsatz kommen. Satz (b) läuft auch unter dem Begriff *Quotientenkriterium*.

▷ **Aufgabe 3 (Energie-Impulstensor)**

Der Energie-Impuls Tensor ist für die ART von hervorragender Bedeutung: in der Formulierung der Einsteinschen Feldgleichungen übernimmt er die Rolle der Massendichte der Newtonschen Gravitationstheorie.

Die genaue Form des Energie-Impulstensor, daran sei erinnert, hängt vom betrachteten System ab, und kann nicht aus der ART deduziert werden. Staub, beispielsweise, ist charakterisiert durch einen Energie-Impulstensor $T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu$, worin $\rho_0(X)$ die Ruhemassendichte, also die Massendichte im lokalen Ruhensystem einer kleinen, zur Zeit $t = X^0/c$ am Ort (X^1, X^2, X^3) lokalisierten Staubportion, und $u(X)$ ihre 4er Geschwindigkeit.

- (a) Zeigen Sie, dass für relativistischen Staub die Annahme eines divergenzfreien Energie-Impulstensor, $T^{\mu\nu}{}_{,\mu} = 0$, im nicht-relativistischen Grenzfall äquivalent der Kontinuitätsgleichung und der Eulergleichung mit verschwindender rechter Seite (kein Druckgradient, da Druck Null).

Bemerkung Partielle Ableitungen notieren wir zuweilen kurz und bündig $f_{,\mu} := \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$.

Staub ist Spezialfall einer größeren Klasse “ideale Flüssigkeit”, wobei sich das Adjektiv “ideal” auf die Abwesenheit jeglicher Reibung etc. bezieht. Der Energie-Impulstensor einer idealen Flüssigkeit ist im lokalen Ruhesystem gegeben

$$T^{\mu\nu}|_{\text{RS}} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (1)$$

worin $p = p(X)$ der Druck im lokalen Ruhesystem bei X , und $\varepsilon = \varepsilon(X)$ die dort vorhandene Energie-Massendichte (die neben der Ruhemasse der Teilchen auch deren kinetische und Wechselwirkungsenergie umfasst).

- (b) Begründen Sie die Form der Energie-Impulstensors der idealen Flüssigkeit.
 (c) Zeigen Sie, dass in einem beliebigen inertialen Laborsystem

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}(\varepsilon + p)u^\mu u^\nu + p\eta^{\mu\nu}, \quad (2)$$

worin $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ die Minkowskimetrik.

- (d) Zeigen Sie, dass das Postulat $T^{\mu\nu}{}_{,\mu} = 0$ im nicht-relativistischen Grenzfall äquivalent der Eulergleichung einer nicht-relativistischen idealen Flüssigkeit.

▷ Aufgabe 4 (Maxwellscher Spannungstensor)

“Staub” und “ideale Flüssigkeit” sind zwei Modellsysteme deren Energie-Impulstensor sich durch einfache Symmetrieargumente hinschreiben lassen. “Plasmen” sind eine dritte wichtige Kategorie wo diese Verfahren allerdings versagt. Man muss bei diesem System zunächst auf die mikroskopischen Grundgleichungen zurückgreifen – und das sind die Maxwell-Gleichungen für die Dynamik der Felder, und die Newton-Lorentzschen Bewegungsgleichungen für die Dynamik der Materie, sprich Punktladungen.

Blättern Sie in Ihren Vorlesungsnotizen zur “Elektrodynamik”. Zeigen Sie, dass der Energie-Impulstensor des gekoppelten Systems “Materie + Elektromagnetisches Feld” sich schreiben lässt $T^{\mu\nu} = T_{\text{emf}}^{\mu\nu} + T_{\text{mat}}^{\mu\nu}$, worin $T_{\text{emf}}^{\mu\nu}$ den Feldanteil, und $T_{\text{mat}}^{\mu\nu}$ den Anteil der Materie beschreibt. Geben Sie die beiden Anteile explizit an, und verifizieren Sie die Divergenzfreiheit, $T^{\mu\nu}{}_{,\mu} = 0$.