

Theoretische Physik
- Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie (SoSe 2014) -
Übungsblatt 4
Emission 03.04.14 – Digestion 04.04.14

▷ **Aufgabe 1**

Ein Fahrgast in einem Karussell erfährt bekanntlich eine Zentripetalbeschleunigung, die umso größer ist, je weiter er von der Karussellachse Platz genommen hat. Aus Sicht des Fahrgastes ist diese Zentripetalbeschleunigung nicht von einer Gravitationsbeschleunigung zu unterscheiden, die ihn nach außen zieht (ein mitgeführter Apfel und eine Feder erfahren die gleiche Beschleunigung).

Seien x, y, z die kartesischen Koordinaten eines Ereignisses im Laborsystem L , entsprechend x', y', z' die kartesischen Koordinaten in einem mit dem Karussell mitrotierenden Bezugssystem. Für ein Karussell, das mit der Winkelfrequenz Ω um die z -Achse rotiert

$$x' = \cos(\Omega t)x + \sin(\Omega t)y, \quad (1)$$

$$y' = \cos(\Omega t)y - \sin(\Omega t)x. \quad (2)$$

$$z' = z. \quad (3)$$

- (a) Mit $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ das Linienelement im Laborsystem, welche Form hat das Linienelement im Karussellsystem?
- (b) Im Karussellsystem ist das Linienelement nicht zeit-orthogonal, d.h. es treten Terme auf, die das Zeitinkrement dt an die Koordinatendifferentiale dx und dy koppeln. Konstruieren Sie eine Transformation $dt \mapsto dt' = dt + \alpha(x', y')dx' + \beta(x', y')dy'$, so dass das Linienelement zeit-orthogonal, also $ds^2 = c^2 g_{0'0'} dt'^2 + g_{x'x'} dx'^2 + g_{x'y'} dx'dy' + g_{x'y'} dy'dx' + g_{y'y'} dy'^2 + g_{z'z'} dz'^2$. Bestimmen Sie die Funktionen $g_{\mu'\nu'}(x', y', z', t')$, und drücken sie deren t', x', y', z' -Abhängigkeit durch das Potential der Zentrifugalbeschleunigung aus.
- (c) Transformieren Sie das Linienelement auf Zylinderkoordinaten $x' = \rho' \cos(\varphi')$, $y' = \rho' \sin(\varphi')$ (z' unverändert). Bestimmen Sie das Verhältnis von Umfang zu Radius eines mit der Rotationsachse konzentrischen Kreises in der xy -Ebene (i) im Laborsystem, (ii) im Karussellsystem.
- (d) Warum dürfen Sie hier vermuten, dass der Aufenthalt in Gravitationsfelder ein Jungunnen und obendrein dem Selbstwertgefühl zuträglich?

▷ **Aufgabe 2**

Gemäß derzeitig favorisiertem Standardmodell der Kosmologie ist das Universum auf hinreichend großen Skalen räumlich homogen, isotrop und flach und dehnt sich im Laufe der Zeit aus. Seine metrischen Eigenschaften werden durch ein Linienelement

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 [dx^2 + dy^2 + dz^2] \quad (15)$$

beschrieben, wo t die Bedeutung einer Weltzeit, und x^i mitbewegte Koordinaten, womit gemeint ist, dass die Weltlinien von Galaxien durch zeitlich konstante x^i beschrieben werden.

Die Zeitabhängigkeit des Skalenfaktors $a(t)$ wird durch die Einsteingleichungen bestimmt. Je nach Modell des Energie-Impulstensors (Staub, Strahlung etc) erhält man

$$a(t) = (t/t_0)^q, \quad 0 < q < 1. \quad (16)$$

. mit $q = \frac{2}{3}$ für ein Materie-dominiertes Universum oder $q = \frac{1}{2}$ für ein Strahlungsdominiertes Universum. Der Parameter t_0 kennzeichnet die willkürlich gewählte Epoche, in der die Koordinatenentfernung gleich der metrischen Entfernung. Meist wählt man “ t_0 =heutzutage”. Und da die Metrik im Limes $t \rightarrow 0$ singular (alle metrischen Entfernungen schrumpfen auf Null), ist diese Wahl äquivalent zu “ t_0 =Alter des Universums”).

- (a) Die Lichtkegel der Geometrie () werden durch Nullgeodäten erzeugt, also Kurven $x^i(t)$ mit $ds^2 = 0$. Bestimmen Sie die Nullgeodäten in X -Richtung durch den Weltpunkt (ct_0, x_0, y_0, z_0) (interpretiert “Jetzt und Hier”). Gegeben $t_0 \approx 13,7$ GLj – wie groß ist das Universum heute? Und was bedeutet das eigentlich?
- (b) Eine Galaxis, die sich heute in einer Entfernung d befindet, emittiert immer Licht der Frequenz ν . Mit welcher Frequenz wird dieses Lichte heute und hier wahrgenommen? (Stichwort: kosmologische Rotverschiebung).