Mathematische Bissen
- Gruppentheorie für PhysikerInnen -

Übungsblatt 1 ($20 + \pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 25.04.14 – Abgabe 08.05.14 – Besprechung n.V.

▷ **Aufgabe 1 (Ja oder Nein)** (1 Punkt)

Es sei $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen incl 0; jemand behauptet $(\mathbb{N}_0, +, 0)$ bilde eine Gruppe. Sie

- ☐ stimmen zu
- ☐ stimmen nicht zu

▷ **Aufgabe 2 (Dimension von Matrixgruppe I)** (1 Punkt)

Die Dimension der generell linearen Gruppe $GL(n, \mathbb{C})$ ist

- ☐ n, schließlich sind das n-dimensionale Matrizen
- ☐ n^2, schließlich haben die n^2 Elemente
- ☐ $2n^2$, schließlich gibt es Real- und Imaginärteil

▷ **Aufgabe 3 (Dimension von Matrixgruppen II)** (2 Punkte)

Zeigen Sie: Die Dimension der $SO(n)$ ist $r = n(n-1)/2$, die Dimension der $SU(n)$ ist $r = n(n+1)/2$.

▷ **Aufgabe 4 (Gruppen der Ordnung 3)** (2 Punkte)

Zeigen Sie: Es gibt genau eine abstrakte Gruppe der Ordnung 3, und die ist isomorph C_3. Geben Sie ein Handvoll Realisierungen an.

▷ **Aufgabe 5 (Gruppen der Ordnung 4)** (4 Punkte)

Zeigen Sie: Es gibt genau zwei abstrakte Gruppe der Ordnung 4, eine isomorph C_4, die andere isomorph $V_4 \cong C_2 \otimes C_2$, sog *Klein'sche Vierergruppe.*

▷ **Aufgabe 6 (Gruppen der Ordnung n)** (4 Punkte)

Zeigen Sie: Jede Gruppe G, deren Ordnung n eine Primzahl ist, ist isomorph zur zyklischen Gruppe C_n, $G \cong C_n$.

▷ **Aufgabe 7 (Äquivalenzrelation Konjugation)** (6 Punkte)

Sie errinern sich – zwei Elemente a und b einer Gruppe G heißen *konjugiert*, falls ein Gruppenelement g exisitert, genannt das konjugierende Element, so dass $a = gbg^{-1}$. Zeigen Sie:

(a) Die Beziehung "a ist zu b konjugiert" ist eine Äquivalenzrelation, $a \sim b \Leftrightarrow \exists g \in G : a = gbg^{-1}$.[2]

---

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

[2] Zur Erinnerung: eine Äquivalenzrelation ist (i) reflexiv, $a \sim a$, (ii) symmetrisch, $a \sim b \Rightarrow b \sim a$, (iii) transitiv, $a \sim b \text{und} b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

(b) Zwei $SO(3)$-Drehungen sind genau dann konjugiert, wenn sie denselben Drehwinkel haben.

Nun induziert eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge M immer auch eine Partition – man sagt auch Zerlegung – in disjunkte Äquivalenzklassen, $\ddot{A}_a = \{b \in M | b \sim a\}$. Die Konjugation liefert demnach eine Zerlegung der Gruppe in disjunkte Klassen, sog *Konjugationsklassen* $[a] := \{b | b = gag^{-1}, g \in G\}$. Zeigen Sie:

(c) Die Konjugationsklassen der $SO(3)$ sind Drehwinkel.

Diese Einsicht wird sich übrigens bei der Diskussion der Drehungen in Euler-Parametrisierung als nützlich erweisen.

▷ **Aufgabe 8 (Rubik's Cube)** (π Punkte)

Rubik's Zauberwürfel ist Ihnen in der Vorlesung gezeigt worden (falls nicht: Wikipedia oder YouTube hilft weiter ...). Hier nun ein kurzes Zitat[3]

> Ideal Toy Company stated on the package of the original Rubik cube that there were more than three billion possible states the cube could attain. It's analogous to Mac Donald's proudly announcing that they've sold more than 120 hamburgers. (J. A. Paulos, Innumeracy)

verbunden mit der Bitte, einmal die Anzahl der möglichen Zustände des Würfels (bei fester Lage des unsichtbaren Zentralwürfelchens) abzuschätzen.

[3] gefunden auf `http://www.gap-system.org/Gap3/Doc3/Examples3/rubik.html`