Mathematische Methoden II LA

- SoSe 2014 -

Übungsblatt 13 (20 Punkte)

Ausgabe 10.04.2014 – Abgabe 17.04.2013 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1 (Wurf und Krümmung)* (9 Punkte)

Der schiefe Wurf, daran sei erinnert, läßt sich in der Wurfebene (hier: XZ-Ebene, mit X die Horizontale, und Z die Vertikale) beschreiben

$$x(t) = x_0 + v_{x0}t\,, \qquad z(t) = z_0 + v_{z0}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{1}$$

worin x_0, z_0 Koordinaten des Abwurfpunktes, v_{0x}, v_{0y} horizontale und vertikale Komponente der Abwurfgeschwindigkeit, und $g \approx 10\text{m/s}^2$ die Erdbeschleunigung.

Wir betrachten die Wurfbewegung für zwei Körper, Ball und Geschoss. Die horizontalen Komponenten der Abwurfgeschwindikeit seien $v_{0x} = 5\text{m/s}$ für den Ball, und $v_{0x} = 500\text{m/s}$ für das Geschoss. Die vertikale Komponente der Abwurfgeschwindigkeit sei jeweils so bestimmt, dass beide Körper die gleiche horizontale Entfernung $l = 10\text{m}$ zurücklegen.

(a) Berechnen Sie die Wurfhöhen und Wurfzeiten der beiden Körper.

(b) Skizzieren Sie, wie in der Schule üblich, die Flugbahnen in der Wurfebene. Bestimmen Sie die Krümmungen der beiden Bahnen in der Wurfebene.

(c) Skizzieren Sie nun die Flugbahnen in einem Raumzeitdiagramm, nun genannt *Weltlinien*. Zeitkoordinate sei ct mit $c \approx 3 \times 10^8\text{m/s}$ die Lichtgeschwindigkeit. Bestätigen Sie, dass der Krümmungsradius der beiden Weltlinien für kleine Abwurfgeschwindigkeiten $v_{0x}, v_{0z} \ll c$ im Scheitelpunkt gegeben ist

$$R = \frac{c^2}{g} \tag{2}$$

Bestätigen Sie, dass für schiefe Würfe auf der Erde $R \approx 9 \times 10^{15}\text{m}$, also ungefähr ein Lichtjahr, $1\text{Lj} = 9,46 \times 10^{15}\text{m}$.

Bemerkung: Der Krümmungsradius hängt nur von der Schwerebeschleunigung und der willkürlich gewählten Lichtgeschwindigkeit ab, nicht aber von der Abwurfgeschwindigkeit. M.a.W R ist eine universelle, die Gravitationswirkung der Erde charakterisierende, geometrische Größe. Aus Sicht der ART sind die Weltlinien von Wurfbewegungen so etwas wie die "Geraden" in einer gekrümmten Raumzeit. Dass sie in Ihrer Skizze (c) "krumm" daherkommen, liegt an der Wahl der Koordinaten: aus Sicht der ART ist die Erde ein beschleunigtes Bezugssystem, und die XYt-Koordinaten sind Koordinaten in einem beschleunigten Bezugssystem. Mehr auf dem nächsten Übungsblatt, Stichwort Rindler Raum-Zeit …

▷ **Aufgabe 2 (Im Spaßbad . . .)*** (9 Punkte)

Ein Massepunkt der Masse m bewege sich reibungsfrei auf einer Schraubenlinie im Erdgravitationsfeld der Feldstärke g. Die Achse der Schraubenlinie (z-Achse) liege vertikal; sie fällt mit der Richtung des Feldes zusammen.

Die Parameterdarstellung der Schraubenlinie in kartesischen Koordinaten ist

$$x(\varphi) = a\cos\varphi\,, \qquad y(\varphi) = a\sin\varphi\,, \qquad z(\varphi) = c\varphi\,. \tag{3}$$

Der Kurvenparamter φ ist der Winkel, den die Projektion des Radiusvektors auf die (x, y)-Ebene mit der x-Achse bildet, $0 \leq \varphi < \infty$.

MACHEN SIE SICH EIN BILD!

Bestimmen Sie die Beschleunigung, die der Massepunkt im Erdfeld besitzt. Berechnen Sie seine Bahngeschwindigkeit und den zurückgelegten Weg (die Bogenlänge s) als Funktion der Zeit t. Die Anfangsbedingungen für diese Größen sind $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$.

Zur Lösung benötigen Sie Kenntnisse der Differentialgeometrie für Raumkurven. Berechnen Sie der Reihe nach

1. die Bogelänge der Kurve,
2. den Tangenteneinheitsvektor,
3. die Krümmung der Kurve,
4. den Hauptnormaleneinheitsvektor und
5. den Binormalenvektor in einem Kurvenpunkt.

Tangentenvektor und Normalenvektor spannen die Schmiegeebene auf. Der Stellungsvektor dieser Ebene ist der Binormalenvektor; diese drei Vektoren bilden das begleitende Dreibein der Kurve.

Aus der Bestimmung dieser Größen folgt die gesuchte Beziehung.

Hinweis: Die Aufgabe wurde entnommen: Reinhard Tiebel, *Theoretische Mechanik in Aufgaben*, Wiley-VCH (2006). Ihre Lösung ist für alle Liebhaber von Spaßbad-Wasserrutschen von Bedeutung. Wüssten Sie, warum?

▷ **Aufgabe 3 (Implizite Kurve)*** (2 Punkte)

Kurven können, müssen aber nicht in parametrisierter Form angegeben werden. Eine beliebte Alternative ist, Kurven als Lösungsmengen von Gleichungen anzugeben.

Betrachte etwa die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$. Nach y aufgelöst $y_\pm(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Der Graph der beiden Funktionen $y_\pm$ ist ein Kreis in der xy-Ebene.

Welche Kurve wird durch die Lösungmenge $\{x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 | x, y \in \mathbb{R}\}$ beschrieben?