Mathematische Methoden II LA

- SoSe 2014 -

Übungsblatt 15 (20 Punkte)

Ausgabe 24.04.2014 – Abgabe 29.04.2013 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ **Aufgabe 1 (Schwerpunkt)** * (4 Punkte)

In der Physik ist der Schwerpunkt eines Körpers K definiert

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int_K \mu(\vec{x}) \vec{x} d^3x \tag{1}$$

worin $\mu(\vec{x}) = \mu(x, y, z)$ die Massendichte, und $M = \int_K \mu(\vec{x}) d^3x$ die Gesamtmasse des Körpers.

Berechnen Sie den Schwerpunkt einer vierseitigen geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche der Kantenlänge a und Höhe h.

▷ **Aufgabe 2 (Trägheitsmoment)** * (4 Punkte)

In der Physik ist das Trägheitsmoment um die Achse ζ eines Körpers K definiert

$$\theta_\zeta := \int_K \mu(\vec{x}) \rho_\zeta^2(\vec{x}) d^3x \tag{2}$$

worin $\mu(\vec{x}) = \mu(x, y, z)$ die Massendichte und $\rho_\zeta(\vec{x}) = \rho_\zeta(x, y, z)$ der senkrechte Abstand eines Punktes $\vec{x}$ von der Achse ζ.

Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Quaders mit Kantenlängen a, b, c und konstanter Massendichte um eine Achse durch die Seitenmitten.

▷ **Aufgabe 3** * (3 Punkte)

Für die Funktion $f(x, y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ berechne man das Integral $\int \int_A f(x, y) dx dy$ wo A ein Kreisringsektor in der XY-Ebene, radial begrenzt durch ρ_0, ρ_1, azimuthal φ_0, φ_1.

Hinweis: Transformation auf ebene Polarkoodinaten erleichtert die Rechnung ...

▷ **Aufgabe 4** * (2 Punkte)

Sei $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Berechnen Sie den Gradienten der Funktionen r^n und $\ln r$.

▷ **Aufgabe 5** * (3 Punkte)

Gegeben zwei skalare Funktionen $f(x, y, z)$ und $g(x, y, z)$. Beweisen Sie die Summen- und Produktregel der Gradientenrechnung,

$$\begin{aligned} \text{grad}(f+g) &= \text{grad} f + \text{grad} g\,, && (5) \\ \text{grad}(fg) &= f \text{grad} g + g \text{grad} f\,. && (6) \end{aligned}$$

▷ **Aufgabe 6** * (4 Punkte)

Erinnern Sie sich an die Schulzeit? Die Arbeit, die Sie verrichten müssen, um einen Körper um eine Strecke $d\vec{r}$ zu verschieben, ist gegeben $dW = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$, wobei $\vec{F}$ die Kraft, die ohne Sie auf den Körper wirkt. Die Gesamtarbeit, die sie aufbringen müssen, um den Körper längs $\vec{r}(\lambda)$ von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ zu verschieben, ist demnach

$$W_{12} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{7}$$

Zeigen Sie: Sofern $\vec{F}$ Gradientenfeld, $\vec{F} = -\mathrm{grad}V$, ist die Verschiebearbeit von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ wegunabhängig durch die Potentialdifferenz gegeben,

$$W_{12} = V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) \tag{8}$$