# Mathematische Methoden II LA

**- SoSe 2013 -**

Übungsblatt 01 (20 Punkte)

Ausgabe 09.04.2013 – Abgabe 16.04.2013 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

---

### ▷ Aufgabe 1 (Deltafolge) (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktionenfolge

$$g_n(x-\xi) := \sqrt{\frac{n}{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-n\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2}\right\}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

im Limes $n \to \infty$ eine Darstellung der $\delta$-Funktion vermittelt, lässig notiert

$$\delta(x-\xi) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-n\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2}\right\}. \tag{2}$$

Hinweis: Machen Sie sich ein Bild der Folge; überzeugen Sie sich davon, dass $\int g_n(x-\xi)dx = 1$ und $\lim_{n\to\infty} g_n(x-\xi) = 0$ für $x \neq \xi$.

Mitteilung: Das Integral der Gaussfunktion hat den Wert $\int_{\infty}^{+\infty} \exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\}dx = \sqrt{2\pi\sigma^2}$.

### ▷ Aufgabe 2 (Regularisierung mit Exponentialfunktion) (5 Punkte)

In der Vorlesung sind Sie mit einem Integral $\int e^{ikx}dk$ konfrontiert worden, und Sie haben gelernt, das so ein Integral erst regularisiert werden muss, bevor es weiter verarbeitet werden kann. Hier betrachten wir die Regularisierung mit einer Exponentialfunktion im Integranden.

Beweisen Sie, dass die Folge von Integralen

$$l_n(x-\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-\xi)-\sigma|k|/n} \frac{dk}{2\pi}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

im Limes $n \to \infty$ eine Darstellung der $\delta$-Funktione vermittelt, lässig notiert

$$\delta(x-\xi) = \lim_{n\to\infty} l_n(x-\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-\xi)} \frac{dk}{2\pi}. \tag{7}$$

### ▷ Aufgabe 3 (Eigenschaften der $\delta$-Funktion) * (10 Punkte)

Die $\delta$-Funktion weist eine Reihe von Eigenschaften auf, die wir Sie bitten zu beweisen

- Parität

$$\delta(x) = \delta(-x) \tag{13}$$

- Multiplikaton mit Funktion

$$g(x)\delta(x-a) = g(a)\delta(x-a) \tag{14}$$

insbesondere

$$x\delta(x) = 0\,. \tag{15}$$

- Variablentransformation

$$\delta\left[g(x)\right] = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|}\delta(x-x_i) \tag{16}$$

wobei die $x_i$ Nullstellen der Funktion $g(x)$. Wichtige Spezialfälle sind

$$\delta[c(x-a)] = \frac{1}{|c|}\delta(x-a) \tag{17}$$

$$\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2|a|}\left[\delta(x-a)+\delta(x+a)\right] \tag{18}$$

- Stammfunktion

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(x^{'}-a)dx^{'} := \theta(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ 1 & \text{für } x > a \end{cases} \tag{19}$$

bzw

$$\frac{d}{dx}\theta(x-a) = \delta(x-a) \tag{20}$$

- Ableitung

$$\delta'(x-a) = -\delta(x-a)\frac{d}{dx} \tag{21}$$

Hinweis: Die Beweise verlaufen alle nach dem gleichen Muster: auf Testfunktion wirken lassen und rumrechnen. Beispiel "Ableitung": $\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d}{dx}\delta(x-a)\right)f(x)dx = \delta(x-a)f(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int \delta(x-a)\left(\frac{d}{dx}fx)\right)dx$ (via partielle Integration).