Mathematische Methoden LA — Wintersemester 2011/12
Übungsblatt 15
Ausgabe: 30. 01. 2012 — Abgabe: 06. 02. 2012

Aufgabe 1: Lineare Gleichungen (4 Punkte)

(a) Gegeben sei die *homogene lineare Gleichung*

$$3x_1 + 2x_2 = 0\,,$$

wobei Lösungen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gesucht sind.

Geben Sie die Lösungsmenge dieser Gleichung in Parameterdarstellung an, und skizzieren Sie sie. Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge ein Vektorraum ist, und finden Sie eine Basis.

(b) Lösen Sie nun die *inhomogene lineare Gleichung*

$$3x_1 + 2x_2 = 5\,.$$

Bestimmen Sie wiederum eine Parameterdarstellung der Lösungsmenge, und skizzieren Sie auch diese Menge. Wie hilft Ihnen hierbei die Lösung der homogenen Gleichung?

(c) Bestimmen Sie nun die Lösungsmengen der *homogenen linearen Differentialgleichung*

$$3x'(t) + 2x(t) = 0\,,$$

sowie der *inhomogenen linearen Differentialgleichung*

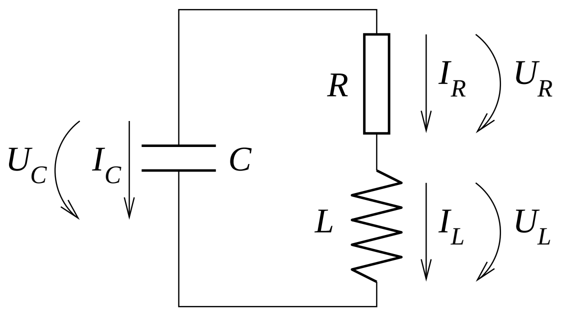
$$3x'(t) + 2x(t) = 5e^{-2t}\,,$$

wobei $x(t)$ eine reellwertige Funktion sein soll.

(Hinweis: auch zum Auffinden einer partikulären Lösung eignet sich hier ein Exponentialansatz!)

Aufgabe 2: Gedämpfter harmonischer Oszillator (6 Punkte)

Gegeben sei ein elektrischer Schwingkreis aus Kondensator mit Kapazität C, Spule mit Induktivität L und Ohm'schen Widerstand R:



Es gelten die Gesetze

$$U_R = R\,I_R\,,$$

$$U_L = L\,\dot{I}_L\,,$$

$$\dot{U}_C = 1/C\,I_C\,.$$

(a) Leiten Sie mit Hilfe der Kirschhoff'schen Regeln die DGL

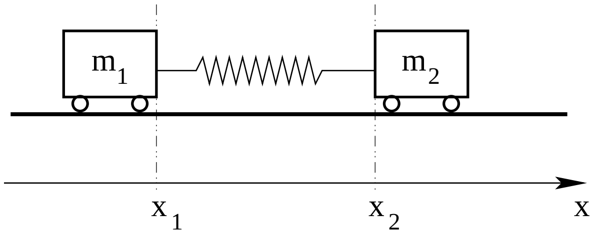
$$L\,\ddot{I}(t) + R\,\dot{I}(t) + 1/C\,I(t) = 0$$

für den Strom $I(t)$ an einem beliebigen Punkt dieses Stromkreises her.

(b) Geben Sie die allgemeine Lösung $I(t)$ an. Welche qualitativ unterschiedlichen Fälle sind zu unterscheiden?

Aufgabe 3: 2-Körper-Problem (6 Punkte)

Gegeben seien zwei Körper mit Massen m_1 und m_2, die sich auf einer horizontalen Unterlage reibungsfrei in x-Richtung bewegen können. Die Körper sind mit einer Feder der Federkonstante k und Ruhlänge l_0 verbunden, und ihre Orte zur Zeit t werden mit $x_1(t)$ und $x_2(t)$ bezeichnet:



(a) Geben Sie die Newton'schen Bewegungsgleichungen für x_1 und x_2 an.

(b) Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen in der Form

$$\ddot{x} \;=\; A\,x + b\,,$$

mit dem Vektor

$$x \;:=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

und einer quadratischen Matrix A und einem konstanten Spaltenvektor b.

(c) Bestimmen Sie nun die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.

(Hinweis: Lösen Sie zunächst die homogene DGL durch durch einen Ansatz der Form

$$x(t) \;=\; v\, e^{\lambda t}\,,$$

wo v ein konstanter Vektor und λ eine (möglicherweise komplexe) Zahl ist (wieviele linear unabhängige Lösungen müssen Sie finden?).

Zur Lösung der inhomogenen DGL brauchen sie nun noch eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL - welche maximal einfache Lösung käme denn dazu in Frage?)

Aufgabe 4: Adiabatengleichung (4 Punkte)

Für Luft bei Normalbedingungen gilt näherungsweise die ideale Gasgleichung $pV = Nk_BT$, sowie $U = 5/2Nk_BT$ für die innere Energie. Bei einer adiabatischen Volumenänderung (also ohne Wärmeaustausch) gilt für die Änderung der inneren Energie

$$\frac{d}{dV}U(V) \;=\; -p\,.$$

(a) Folgern Sie die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dV}p(V) \;=\; -\frac{7}{5}\frac{p(V)}{V}\,.$$

(b) Bestimmen Sie durch Variablentrennung die Lösung dieser DGL.