

Kapitel 0

Grundlagen

0.1 Basic concepts

notation for the light field – from geometrical optics to electromagnetism.

0.2 Optische Abbildungen

Fokussieren, Auflösung, Immersions-Linsen, Anregung von Punktquellen (point spread function vs Auflösung)

Abbildungsgleichung (Vakuum auf beiden Seiten)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (0.1)$$

Lateralvergrößerung M

0.2.1 Im Auge

Medien mit Indices n_1 und n_2 vor und hinter der Linse:

$$\frac{f_1}{a} + \frac{f_2}{b} = 1, \quad \frac{f_1}{n_1} = \frac{f_2}{n_2} = f \quad (?) \quad (0.2)$$

Bild auf der Netzhaut, Abstand $b \approx 20$ mm von der Linse. Die Linse stellt f_1 so ein, dass das Bild bei diesem Abstand b liegt. Dies ist ‘entspannt’ möglich bei dem typischen Abstand des Objekts $a \approx 25$ cm = s_0 , genannt ‘deutliche Sehweite’.

Winkel-Auflösung auf der Netzhaut, eine Bogenminute: $\varepsilon_{\min} \approx 1' \approx 0.29 \times 10^{-3}$.
Entspricht an der deutlichen Sehweite einem Objekt der Größe $\Delta x_{\min} \approx s_0 \varepsilon_{\min} \approx 73 \mu\text{m}$. (Das ist die Pixelgröße eines 360dpi Druckers.)

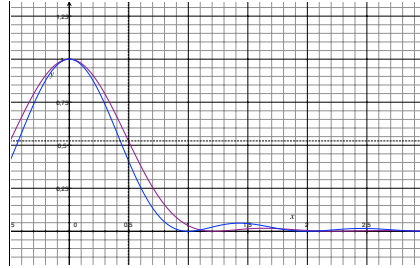


Abbildung 0.1: Diffraction-limited intensity distribution across a focus. Blue: 1D (slit diffraction), purple: 2D (circular aperture). The distance from the focus is given in units of $x = (D/\lambda) \sin \theta$ with D the diameter of the aperture.

0.2.2 Vergrößernde Instrumente

Vergrößerung ausgedrückt durch Winkel ε , unter dem ein Objekt erscheint

$$M = \frac{\varepsilon \text{ mit Instrument}}{\varepsilon \text{ ohne Instrument}} \quad (0.3)$$

Dabei ist $\tan \varepsilon/2 = A/a$ mit der Größe A des Objekts an Abstand a .

Lupe. Tiefenschärfe.

Objekt der Größe G bei deutlicher Sehweite s_0 : Objektwinkel $\tan \varepsilon_0 = G/s_0$. Geometrischer Strahlengang liefert: virtuelles Bild mit Bildwinkel $\tan \varepsilon = G/f$ (Brennweite f). Also die Vergrößerung:

$$M = \frac{\tan \varepsilon}{\tan \varepsilon_0} = \frac{s_0}{f} \quad (0.4)$$

‘Dicke Linse’ (kleiner Krümmungsradius, kleines f): stark vergrößernd.

Mikroskop. Zwei Linsen, Objektiv und Okular (Brennweiten f_1 und f_2). Vergrößerung:

$$M = \frac{(d - f_2)s_0}{f_1 f_2} \quad (0.5)$$

d : Abstand zwischen Linsen, s_0 : deutliche Sehweite

0.2.3 Beugung an Aperturen

Spalt (rechteckige Apertur) von Durchmesser D und Objektwinkel θ Intensitätsprofil

$$\text{Spalt: } I = I_0 \frac{\sin^2 x}{x^2}, \quad x = \pi \frac{D}{\lambda} \sin \theta = \frac{kD}{2} \sin \theta \quad (0.6)$$

Nullstelle bei $x = \pi$. Kreisförmige Apertur mit Durchmesser D :

$$\text{Spalt: } I = I_0 \left(\frac{J_1(x)}{x/2} \right)^2, \quad \text{Bessel-Funktion 1. Ordnung } J_1 \quad (0.7)$$

Nullstelle bei $x = 1.22 \pi$: typische Größe des 'Beugungsscheibchens'.

Konvention für kleinsten auflösbaren Winkel θ_{\min} : Maximum eines Beugungsscheibchens liegt in der Nullstelle des benachbarten. (Dann geht die Intensität zwischen den beiden Maxima auf 85% des Maximums herunter.) Also

$$\sin \theta_{\min} = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (0.8)$$

Das Auge ist so angepasst, dass die Beugung an der Pupille (typisch $D = 2 \text{ mm}$, je nach Lichtverhältnissen) zu Beugungsscheibchen auf der Netzhaut führt, die gerade der Größe der optischen Rezeptor-Zellen entsprechen.

Mikroskop: räumliche Auflösung Δx_{\min} entspricht dem vergrößerten Beugungsscheibchen in der Bildebene (Größe $d_{\text{beug}} = \theta_{\min} b$ mit Abstand b des Bildes von der Linse)

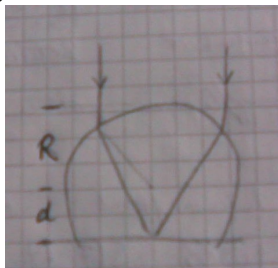
$$\Delta x_{\min} = \frac{d_{\text{beug}}}{2} \frac{g}{b} \approx 1.22 \frac{\lambda}{D} g \quad (0.9)$$

g : Abstand des Gegenstands von der Objektiv-Linse.

0.2.4 Mikroskope mit erhöhter Auflösung

(a) Immersionsöl: Flüssigkeit mit Index n . Numerische Apertur $NA = n \sin \alpha \approx 1.2$ mit $n = 1.5$ und typischem Öffnungswinkel α .

(b) Immersionslinse (*solid immersion lens*, SIL): dasselbe in fester Form. Typischerweise als Halbkugel, so dass die Strahlen aus dem Objektiv senkrecht auf die Linse treffen



Brechungsindex bis zu $n(\text{GaP}) \approx 3.4$.

(c) Linsen, die die NA erhöhen (*numerical aperture increasing lens*, NAAIL): Kombination aus Kugel-Kalotte und noch einer Schicht von Material. Nutze Brechung an der Kalotte aus, die die Strahlen aus dem Objektiv weiter fokussieren. Erhöht die Auflösung bis zu einem Faktor n^2 .

Experiment (zitiert in Novotny & Hecht, *Appl. Phys. Lett.* 2005/6): mit Licht bei $\lambda = 1 \mu\text{m}$ Auflösung von $0.23 \mu\text{m}$ erreicht. Theoretisch ist bis zu $0.14 \mu\text{m}$ zu erwarten.

0.2.5 Point spread function

Wir hatten die Formel für die Auflösung gesehen:

$$\Delta x_{\min} \geq 0.61 \frac{\lambda}{\text{NA}}$$

Aber welches Bild erzeugt ein punktförmiges Objekt im Mikroskop? Diese Frage beantwortet das Konzept der *point spread function*, PSF. (Siehe auch Abschnitt 0.4.5.)

Beispiel: Farbzentrum in einem Festkörper. Bewegen sich in einem starken elektrischen Feld ('Elektromigration'). Aufgabe: verfolge das Farbzentrum über eine Distanz von, sagen wir, $5 \mu\text{m}$. Es ist durchaus möglich, dass in einer Fläche λ^2 nur ein Farbzentrum vorhanden ist – so kann man Bewegungen auf Skalen kleiner als Δx_{\min} beobachten.

Die punktförmige Quelle 'Farbzentrum' führt in der Bildebene zu folgender Feldverteilung (Intensity, genannt PSF)

$$I(\mathbf{r}) = \frac{\pi^4}{\varepsilon_0^2 n n'} \frac{\mu_x^2 \text{NA}^2}{\lambda^6 M^2} \left(\frac{2J_1(x)}{x} \right)^2 \quad (0.10)$$

Brennweiten f' und f von Objektiv und Okular, Index n' unterhalb des Objektivs, Index n in Bildebene, Vergrößerung $M = n f' / (n' f)$, Dipolmoment μ_x der Punktquelle, sog. Airy-Funktion für die Feldverteilung im Fokus

$$\frac{2J_1(x)}{x}, \quad x = \frac{2\pi \text{NA} R}{M\lambda} \quad (0.11)$$

Abstand $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\max}|$ vom Maximum in der Bildebene.

Die Position des Maximums kann man mit Genauigkeit δ (*position accuracy*) vermessen: die hängt (natürlich) vom Rauschen relativ zur Signalstärke ab.

0.2.6 Elemente der Fourier-Optik

Beispiel Röntgen-Streuung: Streuamplitude proportional zur Fourier-Transformierten der Elektronendichte $\rho(\mathbf{r})$

$$A(\mathbf{q}) \sim \int dV \rho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \quad (0.12)$$

Ganz ähnlich verhält es sich in der Optik: das gestreute Licht mit k -Vektor ist die Fourier-Transformierte einer Verteilung von Dipolen im Material.

Eine Linse bewerkstelligt auch eine Fourier-Transformation. Skizze mit parallelem Lichtstrahl, Beugung am Gitter, Linse im Abstand f .

Beispiel aus dem Bereich *puls shaping*: Beugung am Gitter, Linse spaltet Frequenzen räumlich auf. Mit geeigneten Modulatoren kann man jeden Raumpunkt einzeln in

Amplitude und Phase kontrollieren. Linse und Gitter setzen daraus wieder ein Spektrum zusammen.

Zusammenhang Bild-Ebene und Fourier-Ebene (Nahfeld, Fernfeld). Auflösung = Fourier-Heisenberg Relation.

Heisenberg, Fourier und gedämpfte Wellen

Unschärfe-Relation für Impuls und Ort

$$\Delta p_x \Delta x = \hbar \Delta k_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (0.13)$$

für Photonen-Impuls $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ ausgedrückt durch Wellenvektor \mathbf{k} . Zum Beispiel Fokussieren eines Strahls: Öffnungswinkel α , numerische Apertur $\text{NA} = n \sin \alpha$, transversale Impulse $|k_x| \leq 2\pi/\lambda$. Also mit Heisenberg für die “Größe des Fokus”

$$\Delta x \geq \frac{1}{2\Delta k_x} \geq \frac{\lambda}{4\pi} \quad (0.14)$$

Vergleich zu Abbe

$$\Delta x \geq 0.601 \frac{\lambda}{\text{NA}} \quad (0.15)$$

Zahlenwerte sind anders: andere Definition der “Größe” des Fokus. Sehen wir in Abschnitt 0.4.

Auflösung verbessern

Wellenvektor mit komplexen Komponenten

$$|\mathbf{k}| = k = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (0.16)$$

Nehme $k_z = i\kappa$ rein imaginär. Dann ist die Welle in z -Richtung zwar gedämpft (man sagt: *evaneszent*), $\sim e^{ik_z z} = e^{-\kappa z}$. Aber in x -Richtung ist es durchaus möglich, dass $|k_x| > 2\pi/\lambda$: so kann man auch Strukturen auflösen, die viel kleiner als die Wellenlänge λ sind.

Wir werden in der Vorlesung sehen, wie man diesen Trick genauer durchführt. Etwa wie man den “Betrag” $|\mathbf{k}|$ zu verstehen hat (nicht als komplexen Betrag).

0.3 Optische Felder

Vektoren \mathbf{E} und \mathbf{B} . Davon das elektrische Feld \mathbf{E} am meisten verwendet, weil die Antwort der Materie darauf am größten ist. Wellen-Felder: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, räumlich verteilt. Kein ‘punktförmiges Photon’, kein ‘scharf definierter Lichtstrahl’. Polarisationsvektoren.

Wann ist Polarisation irrelevant? ... geometrische Optik, also große Skalen. Nano-Optik ist genau das Gegenteil.

Konzept ‘Phasenfront’. Komplexe Notation

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \quad (0.17)$$

Fester Polarisations-Vektor \mathbf{e} : $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}U(\mathbf{r})$ mit komplexer (‘skalärer’) Funktion $U(\mathbf{r})$. Phasenfront: Punktmenge (Fläche) mit $\arg U = \text{const.}$

Konzept ‘Intensität’.

Ausbreitung in Materie: lokale Wellenlänge (Brechungsindex), Absorption, Poynting-Vektor.

0.4 Klassische Grenzen der Auflösung

(Di 16. Apr)

Fokussieren, Auflösung, Immersions-Linsen, Anregung von Punktquellen (point spread function vs Auflösung)

Abbildungsgleichung (Vakuum auf beiden Seiten)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (0.18)$$

Lateralvergrößerung M

0.4.1 Im Auge

Medien mit Indices n_1 und n_2 vor und hinter der Linse:

$$\frac{f_1}{a} + \frac{f_2}{b} = 1, \quad \frac{f_1}{n_1} = \frac{f_2}{n_2} = f \quad (?) \quad (0.19)$$

Bild auf der Netzhaut, Abstand $b \approx 20$ mm von der Linse. Die Linse stellt f_1 so ein, dass das Bild bei diesem Abstand b liegt. Dies ist ‘entspannt’ möglich bei dem typischen Abstand des Objekts $a \approx 25$ cm = s_0 , genannt ‘deutliche Sehweite’.

Winkel-Auflösung auf der Netzhaut, eine Bogenminute: $\varepsilon_{\min} \approx 1' \approx 0.29 \times 10^{-3}$. Entspricht an der deutlichen Sehweite einem Objekt der Größe $\Delta x_{\min} \approx s_0 \varepsilon_{\min} \approx 73 \mu\text{m}$. (Das ist die Pixelgröße eines 360dpi Druckers.)

0.4.2 Vergrößernde Instrumente

Vergrößerung ausgedrückt durch Winkel ε , unter dem ein Objekt erscheint

$$M = \frac{\varepsilon \text{ mit Instrument}}{\varepsilon \text{ ohne Instrument}} \quad (0.20)$$

Dabei ist $\tan \varepsilon/2 = A/a$ mit der Größe A des Objekts an Abstand a .

Lupe. Tiefenschärfe.

Objekt der Größe G bei deutlicher Sehweite s_0 : Objektwinkel $\tan \varepsilon_0 = G/s_0$. Geometrischer Strahlengang liefert: virtuelles Bild mit Bildwinkel $\tan \varepsilon = G/f$ (Brennweite f). Also die Vergrößerung:

$$M = \frac{\tan \varepsilon}{\tan \varepsilon_0} = \frac{s_0}{f} \quad (0.21)$$

‘Dicke Linse’ (kleiner Krümmungsradius, kleines f): stark vergrößernd.

Mikroskop. Zwei Linsen, Objektiv und Okular (Brennweiten f_1 und f_2). Vergrößerung:

$$M = \frac{(d - f_2)s_0}{f_1 f_2} \quad (0.22)$$

d : Abstand zwischen Linsen, s_0 : deutliche Sehweite

0.4.3 Beugung an Aperturen

Spalt (rechteckige Apertur) von Durchmesser D und Objektwinkel θ Intensitätsprofil

$$\text{Spalt: } I = I_0 \frac{\sin^2 x}{x^2}, \quad x = \pi \frac{D}{\lambda} \sin \theta = \frac{kD}{2} \sin \theta \quad (0.23)$$

Nullstelle bei $x = \pi$. Kreisförmige Apertur mit Durchmesser D :

$$\text{Spalt: } I = I_0 \left(\frac{J_1(x)}{x/2} \right)^2, \quad \text{Bessel-Funktion 1. Ordnung } J_1 \quad (0.24)$$

Nullstelle bei $x = 1.22 \pi$: typische Größe des ‘Beugungsscheibchens’.

Konvention für kleinsten auflösbaren Winkel θ_{\min} : Maximum eines Beugungsscheibchens liegt in der Nullstelle des benachbarten. (Dann geht die Intensität zwischen den beiden Maxima auf 85% des Maximums herunter.) Also

$$\theta_{\min} = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (0.25)$$

Das Auge ist so angepasst, dass die Beugung an der Pupille (typisch $D = 2$ mm, je nach Lichtverhältnissen) zu Beugungsscheibchen auf der Netzhaut führt, die gerade der Größe der optischen Rezeptor-Zellen entsprechen.

Mikroskop: räumliche Auflösung Δx_{\min} entspricht dem vergrößerten Beugungsscheibchen in der Bildebene (Größe $d_{\text{beug}} = \theta_{\min} b$ mit Abstand b des Bildes von der Linse)

$$\Delta x_{\min} = \frac{d_{\text{beug}} g}{2} = 1.22 \frac{\lambda}{D} g \quad (0.26)$$

g : Abstand des Gegenstands von der Objektiv-Linse.

0.4.4 Mikroskope mit erhöhter Auflösung

(a) Immersionsöl: Flüssigkeit mit Index n . Numerische Apertur $NA = n \sin \alpha \approx 1.2$ mit $n = 1.5$ und typischem Öffnungswinkel α .

(b) Immersionslinse (*solid immersion lens*, SIL): dasselbe in fester Form. Typischerweise als Halbkugel, so dass die Strahlen aus dem Objektiv senkrecht auf die Linse treffen

* Skizze

Brechungsindex bis zu $n(\text{GaP}) \approx 3.4$.

(c) Linsen, die die NA erhöhen (*numerical aperture increasing lens*, NAAIL): Kombination aus Kugel-Kalotte und noch einer Schicht von Material. Nutze Brechung an der Kalotte aus, die die Strahlen aus dem Objektiv weiter fokussieren. Erhöht die Auflösung bis zu einem Faktor n^2 .

Experiment (zitiert in Novotny & Hecht, *Appl. Phys. Lett.* 2005/6): mit Licht bei $\lambda = 1 \mu\text{m}$ Auflösung von $0.23 \mu\text{m}$ erreicht. Theoretisch ist bis zu $0.14 \mu\text{m}$ zu erwarten.

0.4.5 Point spread function

Wir hatten die Formel für die Auflösung gesehen:

$$\Delta x_{\min} \geq 0.61 \frac{\lambda}{\text{NA}}$$

Aber welches Bild erzeugt ein punktförmiges Objekt im Mikroskop? Diese Frage beantwortet das Konzept der *point spread function*, PSF.

Beispiel: Farbzentrum in einem Festkörper. Bewegen sich in einem starken elektrischen Feld ('Elektromigration'). Aufgabe: verfolge das Farbzentrum über eine Distanz von, sagen wir, $5 \mu\text{m}$. Es ist durchaus möglich, dass in einer Fläche λ^2 nur ein Farbzentrum vorhanden ist – so kann man Bewegungen auf Skalen kleiner als Δx_{\min} beobachten.

Die punktförmige Quelle 'Farbzentrum' führt in der Bildebene zu folgender Feldverteilung (Intensity, genannt PSF)

$$I(\mathbf{r}) = \frac{\pi^4}{\varepsilon_0^2 n n'} \frac{\mu_x^2 \text{NA}^2}{\lambda^6 M^2} \left(\frac{2J_1(x)}{x} \right)^2 \quad (0.27)$$

Brennweiten f' und f von Objektiv und Okular, Index n' unterhalb des Objektivs, Index n in Bildebene, Vergrößerung $M = n f' / (n' f)$, Dipolmoment μ_x der Punktquelle, sog. Airy-Funktion für die Feldverteilung im Fokus

$$\frac{2J_1(x)}{x}, \quad x = \frac{2\pi \text{NA} R}{M\lambda} \quad (0.28)$$

Abstand $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\max}|$ vom Maximum in der Bildebene.

Die Position des Maximums kann man mit Genauigkeit δ (*position accuracy*) vermessen: die hängt (natürlich) vom Rauschen relativ zur Signalstärke ab.

0.4.6 Elemente der Fourier-Optik

Beispiel Röntgen-Streuung: Streuamplitude proportional zur Fourier-Transformierten der Elektronendichte $\rho(\mathbf{r})$

$$A(\mathbf{q}) \sim \int dV \rho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \quad (0.29)$$

Ganz ähnlich verhält es sich in der Optik: das gestreute Licht mit k -Vektor ist die Fourier-Transformierte einer Verteilung von Dipolen im Material.

Eine Linse bewerkstelligt auch eine Fourier-Transformation. Skizze mit parallelem Lichtstrahl, Beugung am Gitter, Linse im Abstand f .

(Di 23. Apr) Beispiel aus dem Bereich *puls shaping*: Beugung am Gitter, Linse spaltet Frequenzen räumlich auf. Mit geeigneten Modulatoren kann man jeden Raumpunkt einzeln in Amplitude und Phase kontrollieren. Linse und Gitter setzen daraus wieder ein Spektrum zusammen.

Zusammenhang Bild-Ebene und Fourier-Ebene (Nahfeld, Fernfeld). Auflösung = Fourier-Heisenberg Relation