

Kapitel 1

Licht in Materie

Makroskopische Maxwell-Gleichungen.

Warum dies auf der nano-Skala sinnvoll ist. Dielektrische Funktion, Leitfähigkeit, wie die Elektrodynamik “nicht-perturbativ” die Material-Antwort einbezieht. Wiederholung Randbedingungen an (scharfen) Grenzflächen. Anwendungen (später): Fresnel-Koeffizienten (Ellipsometrie), kleine Strukturen, Streuung an strukturierten Oberflächen.

Antwort von Materie auf Felder: Leitfähigkeit, dielektrische Funktion, Dispersion.

Überblick über typische Materialien (Leiter, Isolatoren, Halbleiter). Dispersion und Absorption, Summenregeln (zu speziell?). Abhängigkeit von k : später. Was im Frequenzraum interessant ist (was wird spektroskopiert?). Beispiele: auch SERS?

1.1 Makroskopische Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} &= \mu_0 \mathbf{j}\end{aligned}\quad (1.1)$$

1.1.1 Antwort der Materie

Ladungen ρ und Ströme \mathbf{j} , die von Feldern induziert werden. Beschreibung über Polarisation \mathbf{P} und Magnetisierung \mathbf{M} , die linear auf Felder antworten:

$$\rho = \rho_{\text{mac}} - \nabla \cdot \mathbf{P} = \rho_{\text{mac}} - \varepsilon_0 \nabla \cdot (\varepsilon - 1) \mathbf{E} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{mac}} + \partial_t \mathbf{P} + \nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{j}_{\text{mac}} + \varepsilon_0 \partial_t (\varepsilon - 1) \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \mathbf{B} \quad (1.3)$$

Index ‘mac’ für sogenannte ‘makroskopische’ Ladungen und Ströme, lassen wir weg, wenn es keine Doppeldeutigkeit gibt.

Zur Erinnerung: ‘makroskopisch’ = bleibt nach räumlicher Mittelung über ‘Atome’ (mikroskopische Struktur der Materie) über. Wenn nur Dipole ausgelenkt werden, $\mathbf{P} \neq \mathbf{0}$, bleibt die Materie ‘makroskopisch’ neutral, also $\rho_{\text{mac}} = 0$. Es sei denn, es liegt eine inhomogene Dichte oder eine Grenzfläche vor.

Die Konstruktion mit Hilfs-Feldern \mathbf{P} und \mathbf{M} sichert Ladungserhaltung. Enthält aber auch eine gewisse ‘Eichfreiheit’, weil verschiedene \mathbf{P} und \mathbf{M} auf dieselben Ladungen und Ströme führen. Eindeutigkeit wird durch zusätzliche Forderungen erreicht, die manchmal nicht explizit aufgeschrieben werden.

Antwortfunktionen in Gl.(1.2): dielektrische ‘Konstante’ ε oder Suszeptibilität $\varepsilon - 1$. Permeabilität μ . Taucht aus historischen Gründen in anderer Form als ε auf. Im allgemeinen gibt es auch Antwort-Koeffizienten für Ladungsdichte ρ_{mac} und Stromdichte \mathbf{j}_{mac} . Zu Ladungen an Grenzflächen werden wir später noch etwas hören. Gut bekannt ist etwa das Ohm’sche Gesetz für den Strom

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.4)$$

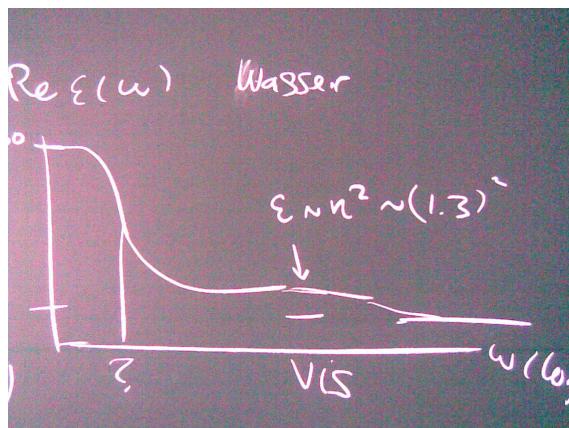
mit der Leitfähigkeit σ .

Im Allgemeinen sind alle Antwort-Koeffizienten keine Konstanten, sondern von der Frequenz abhängig. Dies nennt man *Dispersion*. In der Zeit-Domäne tritt z.B. im Ohm’schen Gesetz ein Integral über die Vergangenheit (Faltung!) auf, das im Frequenz-Raum zu einem Produkt wird:

$$\mathbf{j}(t) = \int_{-\infty}^t dt' \tilde{\sigma}(t - t') \mathbf{E}(t') \quad \Rightarrow \quad \mathbf{j}(\omega) = \sigma(\omega) \mathbf{E}(\omega) \quad (1.5)$$

In derselben Weise wird aus der dielektrischen Konstanten ε die *dielektrische Funktion* $\varepsilon(\omega)$. Die üblich verwendeten Konstanten findet man typischerweise in bestimmten Frequenzbereichen wieder: etwa bei ganz tiefen Frequenzen (Antwort auf langsam veränderliche Felder) oder wenn man sich nur für einen bestimmten Spektralbereich interessiert: Glas hat im sichtbaren Licht eine nur schwach veränderliche dielektrische Funktion $\varepsilon \approx n^2$ wobei n der Brechungsindex ist (dazu in einem Augenblick mehr).

Skizze für ein polares Medium wie Wasser



Der Übergang zu großen Werten bei tiefen Frequenzen um den Mikrowellenbereich (hängt mit der Rotationsfrequenz des Wasser-Moleküls zusammen). Unterhalb dieser Frequenz können die Dipolmomente dem Feld folgen (Orientierungs-Polarisation) und die dielektrische Antwort ist viel stärker.

Man sieht aus Gl.(1.3), dass man im Allgemeinen zwischen dielektrischer ‘Konstante’ und Leitfähigkeit nicht gut unterscheiden kann, denn sie tauchen als komplexe Kombination auf. Eine einfache Umformung liefert

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_0 \mu} \mathbf{B} + i\omega \epsilon_0 \left(\epsilon(\omega) + \frac{i\sigma(\omega)}{\epsilon_0 \omega} \right) \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (1.6)$$

wobei die Vorzeichen-Konvention der Physik $\partial_t \mapsto -i\omega$ verwendet wird. (In der Optik und Elektrotechnik wird gerne $\partial_t \mapsto +i\omega$ benutzt.) Wir fassen im folgenden als dielektrische Funktion die Summe beider Terme auf

$$\epsilon(\omega) + \frac{i\sigma(\omega)}{\epsilon_0 \omega} \mapsto \epsilon_b(\omega) + \frac{i\sigma(\omega)}{\epsilon_0 \omega} =: \epsilon(\omega) \quad (1.7)$$

Der Index ‘b = background’ wird später erläutert, wenn wir konkrete Beispiele und Materialien ansehen.

Die beiden vektoriellen Maxwell-Gleichungen erhalten eine angenehm symmetrische Form, wenn man statt \mathbf{B} (‘magnetische Flussdichte’) das ‘Magnetfeld’ $\mathbf{H} = \mu_0 \mu \mathbf{B}$ einführt:

$$\nabla \times \mathbf{H} + i\omega \epsilon_0 \epsilon(\omega) \mathbf{E} = \mathbf{j} \quad (1.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} - i\omega \mu_0 \mu(\omega) \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (1.9)$$

Die Divergenzen dieser Gleichungen liefern die übrigen zwei Maxwell-Gleichungen, wobei im Coulomb-Gesetz $i\omega \rho = \nabla \cdot \mathbf{j}$ sein muss (Ladungserhaltung).

1.2 Wellen in homogenen Medien

1.2.1 Dispersionsrelation

Wird eine der Gleichungen in die andere eingesetzt, erhalten wir die makroskopische Wellengleichung (Annahme: ε und μ hängen nicht vom Ort ab = homogenes Medium)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \mu(\omega) \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (1.10)$$

wobei $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ benutzt wurde. Die zweite Ableitung muss verstanden werden als

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (1.11)$$

Im homogenen Medium dürfen wir die Lösungen der Wellengleichung (1.10) als ebene Wellen ansetzen: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mathcal{E} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ mit einer komplexen Vektor-Amplitude \mathcal{E} . Eingesetzt in die Wellengleichung ergeben sich zwei Klassen von Lösungen:

Transversale Moden. Die Amplitude \mathcal{E} steht ‘senkrecht’ auf dem Wellenvektor: $\mathbf{k} \cdot \mathcal{E} = 0$. (Weil möglicherweise auch \mathbf{k} komplex ist, darf man das Wort ‘senkrecht’ nicht zu wörtlich nehmen.) Die Beziehung zwischen k -Vektor und Frequenz heißt

$$\text{Dispersionsrelation: } \mathbf{k}^2 = \sum_i k_i^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \mu(\omega) \quad (1.12)$$

Mit dem (komplexen) Brechungsindex $n^2(\omega) = \varepsilon(\omega) \mu(\omega)$ erhält man die bekannte Relation für die Lichtgeschwindigkeit in einem Medium

$$k = \frac{\omega}{c/n(\omega)} \quad \text{oder} \quad n(\omega) = \frac{ck}{\omega} \quad (1.13)$$

Die zweite Formel wird in der Optik häufig benutzt und als ‘effektiver Index’ sogar in inhomogenen Medien verwendet (z.B. Moden in einer Glasfaser). Der Physiker mag natürlich nicht davon lassen, von Quasi-Teilchen zu reden, deren Frequenz (Energie) von der Wellenzahl (Impuls) abhängt:

$$k = \frac{\omega}{c/n(\omega)} \quad \rightarrow \quad E = \hbar\omega(k) \quad (1.14)$$

Dazu muss man natürlich nach der Frequenz auflösen können. Ist diese zudem komplex, ist Streit über die Interpretation des Quasi-Teilchens vorprogrammiert: ‘endliche Lebensdauer’ in der Zeit oder ‘endliche Propagationslänge’ im Raum?

Longitudinale Moden. Was passiert, wenn \mathbf{k} und \mathcal{E} parallel sind? Diese Moden heißen longitudinal, weil der Feld-Vektor entlang der Ausbreitungsrichtung zeigt. In der Wellengleichung haben wir dann $\mathbf{k} \times \mathcal{E} = 0$ (was auch trivial für komplexe Vektoren gilt) und es bleibt als Dispersionsrelation nur die simple Gleichung

$$\text{longitudinal: } \omega^2 \varepsilon(\omega) \mu(\omega) = 0 \quad (1.15)$$

In der Übung diskutieren wir den einfachen Fall eines freien Elektronengases, wo diese Gleichung eine Lösung $\omega = \omega_p$ mit der sogenannten Plasma-Frequenz zulässt. (Die Lösung wird im Allgemeinen komplex.) Typische Zahlenwerte hängen von der Elektronendichte ρ_e im Plasma ab, es gilt $\omega_p \sim (\rho_e/m_e)^{1/2}$. Es gibt allerdings auch Fälle, wo die dielektrische Funktion komplizierter ist und nicht nur von der Frequenz, sondern auch von \mathbf{k} abhängt. Dies ist etwa für Exzitonen der Fall, aber auch in dichten Plasmen auf kurzen Längenskalen (typischerweise von der Ordnung der Fermi-Wellenlänge). Solche Medien nennt man ‘räumlich dispersiv’ oder ‘nichtlokal’. (Die Strom-Antwort zum Beispiel hängt dann vom elektrischen Feld an benachbarten Punkten ab.) Stichworte: ‘anomaler Skin-Effekt’ (hohe Frequenzen) und ‘Abschirmung’ (quasi-statische Felder, z.B. von eingebrachten Ladungen).

Vorsicht. Wenn wir schon bei der k -Abhängigkeit von ε sind: streng genommen muss man zwischen transversaler ε_T und longitudinaler ε_L dielektrischer Funktion unterscheiden. Wir bauen einen Tensor (lineare Abbildung)

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_L(\mathbf{k}, \omega) + \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon_T(\mathbf{k}, \omega) \quad (1.16)$$

wobei $\varepsilon_{L,T}$ in einem isotropen Medium nur vom Betrag k abhängen. *Übung:* man überzeuge sich davon, dass in so einem Fall in der transversalen Dispersionsrelation (1.12) die Funktion ε_T verwendet werden muss und in Gl.(1.15) für longitudinale Moden ε_L .

Noch mehr Vorsicht. In einem räumlich dispersiven Medium wie in Gl.(1.16) ist die Aufteilung in elektrische (ε) und magnetische (μ) Antwort nicht mehr eindeutig. Räumlich dispersive Medien sind automatisch auch magneto-dielektrisch ...

Beispiel Plasma

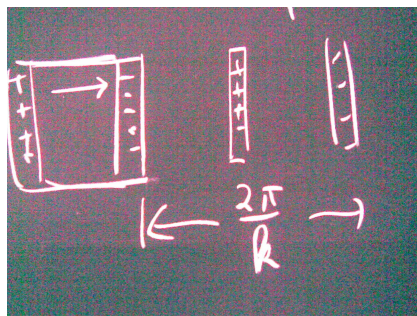
Dispersionsrelationen aufmalen. ‘Massive’ Photonen (Plasmonen). Unterhalb der Plasma-Kante: imaginärer Index. (Eindring-Tiefe: ‘Meissner-Länge’.)

Modell für dielektrische Funktion (‘Plasma-Modell’)

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \mu(\omega) = 1 \quad (1.17)$$

mit sogenannter Plasmafrequenz ω_p . Siehe Übungen für konkrete Zahlen. Den elektromagnetischen Hintergrund besprechen wir im nächsten Block.

Dispersionsrelation für *longitudinale* Moden (1.15) ergibt die konstante Frequenz $\omega_L = \omega_p$, für alle Werte von k . Diese Anregung wird ‘Plasmon’ genannt. Zur Illustration ein Schema mit Überschuss- und ‘Unterschuss’-Ladungen und den elektrischen Feldern (Pfeil, zeigt in der Tat in \mathbf{k} -Richtung)



Diese Anregung kann also als ‘(Ladungs)Dichtewelle’ verstanden werden. Wird die Antwort des Plasmas genauer beschrieben (räumliche Dispersion), bekommt man auch eine k -Abhängigkeit (und damit eine Gruppengeschwindigkeit).

Transversale Moden aus Gl.(1.12):

$$k^2 = \mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}, \quad \omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \quad (1.18)$$

Diese Moden heißen Plasmon-Polaritonen (oder manchmal auch einfach nur Plasmonen). Die Dispersionsrelation hat formal die Form eines massiven Teilchens, wie in der Relativitätstheorie ($E = \hbar\omega$, $mc^2 = \hbar\omega_p$, $p = \hbar k$)

$$E^2 = (mc^2)^2 + c^2 p^2 \quad (1.19)$$

Die Plasmafrequenz kann also als ‘Ruhe-Energie’ des Plasmons interpretiert werden: man findet für Elektronendichte in typischen Metallen $\hbar\omega_p = 5 \dots 10 \text{ eV}$, viel kleiner als die Ruhemasse des Elektrons (511 keV).

Noch tiefere Frequenzen: diffusive Ausbreitung (Skin-Effekt). Einfachste Herleitung: dielektrische Funktion ohne Polarisation, nur mit Ohm’scher Leitfähigkeit. Aus Gl.(1.7):

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0\omega} \approx \frac{i\sigma}{\varepsilon_0\omega} \quad (1.20)$$

Die Näherung ist gut, wenn die Frequenz kleiner als das Verhältnis σ/ε_0 ist. Das ist in guten Leitern fast immer der Fall: $\sigma/\varepsilon_0 \sim 10^{17} \text{ s}^{-1}$. Jetzt wird die Dispersionsrelation richtig seltsam:

$$k^2 = i\omega\sigma\mu_0 \quad (1.21)$$

so dass der k -Vektor komplex wird:

$$k = \frac{1 + i}{\sqrt{2}} (\omega \sigma \mu_0)^{1/2} \quad (1.22)$$

Ein mit Frequenz ω einfallendes Feld tritt also derart in den Leiter ein, dass Dämpfung und Schwingung auf derselben Längenskala stattfinden: dies nennt man den Skin-Effekt mit der Skin-Tiefe

$$\delta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\omega \sigma \mu_0}} \quad (1.23)$$

Typische Werte (wieder für gute metallische Leiter) liegen bei 30 nm für Frequenzen um 1 GHz: dies erklärt, warum bei hochfrequenten Signalen (Fernsehen, Mobilfunk) dünne Leiter benutzt werden können: der Strom fließt nur an der Oberfläche, nicht im Volumen. Deswegen der Name 'skin effect'.

In Regime des Skin-Effektes gehorcht das Feld in dem Leiter nicht einer Wellengleichung, sondern einer Diffusionsgleichung. Ähnliche stark gedämpfte Wellen treten auch in der Wärmeleitung mit periodischem Treiben auf, etwa im Permafrostboden (Periode = ein Jahr).

Beispiel Glas

Diskussion Absorption. Bilanzgleichung für elektromagnetische Energie im Medium (zur Vereinfachung ϵ_b , μ und σ frequenz-unabhängig):

$$\partial_t \left(\frac{\epsilon_0 \epsilon_b}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{\mu_0}{2} \mu \mathbf{H}^2 \right) + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\sigma \mathbf{E}^2 - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (1.24)$$

Energiedichte, Poynting-Vektor (Energiestrom), Ohm'sche Verlustleistung, Arbeit, die das Feld auf Strömen leisten (oder umgekehrt). Wenn man das mit einem komplexen $\epsilon(\omega)$ rechnet, stellt man genauso fest, dass sein Imaginärteil zum Energieverlust führt. Hier ist das einfach die Leitfähigkeit und die entsprechende Joule'sche Wärme. Umgekehrt entspricht dem Realteil $\text{Re } \epsilon(\omega)$ die Energie, die reversibel in dem System 'Feld+Materie' gespeichert ist.

In einem Medium ohne Absorption ist der Brechungsindex $n(\omega) = n$ reell und wir erhalten als mögliche k -Vektoren eine Kugel mit dem Radius

$$|\mathbf{k}| = \frac{\omega n}{c} \quad (1.25)$$

Ein beliebiges, unendlich ausgedehntes Lichtfeld kann somit als ein Fourier-Integral geschrieben werden

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{|\mathbf{u}|=1} d^2 u \vec{\mathcal{E}}(\mathbf{u}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) \quad (1.26)$$

dessen k -Vektoren alle dieselbe Länge $k = n\omega/c$ haben.

Trennung von Längenskalen in der geometrischen Optik: ebene Welle vs Lichtstrahl (Strahlenbündel). Brechung/Reflexion an lokal ebenen Grenzflächen.

Nach den üblichen Regeln für Fourier-Transformationen scheint man im Ortsraum nur Strukturen mit einer minimalen Größe von der Ordnung

$$\Delta r > \frac{1}{\Delta k} = \frac{\lambda}{2\pi n} \quad (1.27)$$

erzeugen zu können. Hier ist $\lambda = 2\pi c/\omega$ die Wellenlänge im Vakuum. Wir haben die Skalierung der Beugungsbegrenzung von Licht wiedergefunden.

Ein Medium mit einem hohen Brechungsindex kann also bereits größere k -Vektoren 'bereitstellen'. Dies wird in der Mikroskopie schon lange ausgenutzt, indem man Objektive und Strahlengang in ein flüssiges Medium taucht, genannt 'Immersionöl'. Typischer Brechungsindex $n \sim 1.5$? Was sind das für Substanzen?

? Paraxiale Näherung

Zusammenhang Bild-Ebene und Fourier-Ebene (Nahfeld, Fernfeld), numerische Apertur.

Beispiele für fokussiertes Licht (Beugungsintegrale). Regeln für Aperturen (wie den Bereich der k -Vektoren abschneiden). Schwaches vs starkes Fokussieren: Polarisation im Fokus.