Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2013) -

Klausurbeispiel 28.06.13 (90 Punkte)

Ausgabe 14:15h – Abgabe 15:45h – Besprechung n.V.

– keine Hilfsmittel–

Verständnis und Gedächtnisfragen (30 Punkte)

▷ **Aufgabe 1 (Grundlagen I)** (15 Punkte)

(a) Gegeben ein Massepunkt, dessen Zustand in der Ortsdarstellung durch eine Wellenfunktion $\psi(\vec{x}, t)$ beschrieben sei. Was ist die physikalische Bedeutung von $\psi(\vec{x}, t)$? (2P)

(b) Wie lautet für gegebenes $\psi(\vec{x}, t)$ die Wellenfunktion in der Impulsdarstellung? Was ist ihre physikalische Bedeutung? (3P)

(c) Der Massepunkt sei in einem Zustand

$$\psi(\vec{x}, t) \propto \alpha(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \beta(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{1}$$

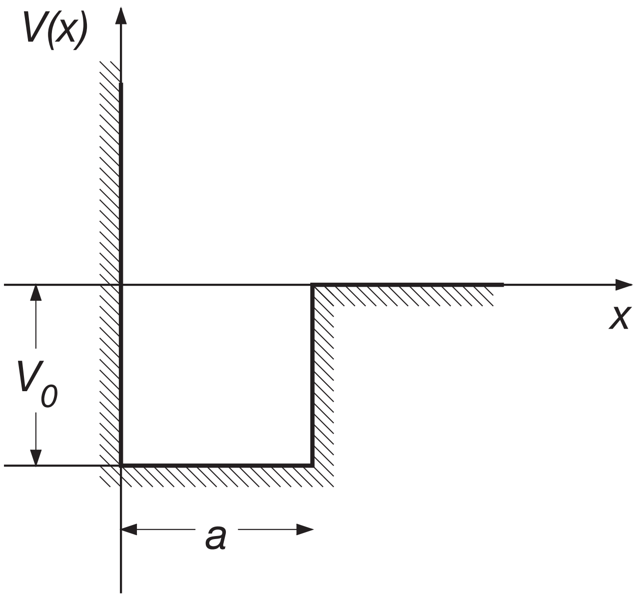
mit $\vec{k} = (a, a, 0)$ präpariert. Was ist die physikalische Bedeutung der komplexen Koeffizienten α, β (Betrag, Phase)? (4P)

(d) Ein Massepunkt sei im Zustand (1) präpariert. Eine Messung der x-Komponente des Impulses ergibt den Wert $\hbar a$. Welche Aussage können Sie für dieses Teilchen über die zu erwartenden Messwerte (i) bei einer Messung der y-Komponente des Impulses, (ii) bei einer Ortsmessung machen? (6P)

▷ Aufgabe 2 (Grundlagen II) (15 Punkte)

(a) Wie lautet die Heisenberg'sche Unschärferelation (für Ort und Impuls) und was ist ihre Interpretation? (6P)

(b) Schätzen Sie für ein Teilchen der Masse m im skizzierten Potential die Grundzustandsenergie ab. Skizzieren Sie Eigenfunktionen zu Energiewerten unterhalb und oberhalb des Potentialrandes. (9P)



Rechenaufgaben (60 Punkte)

▷ **Aufgabe 3 (Delta-Potential)** (15 Punkte)

Wir betrachten ein Punktteilchen in einer Raumdimension, das sich in einem bei a lokalisierten δ-Potential bewegt,

$$V(x) = \alpha\delta(x-a) \tag{2}$$

worin der Parameter α ein Maß für die Stärke des Potentials.

(a) Der Parameter α muss reell sein – warum? Welche physikalische Dimension hat α? (3P)

(c) Setzen Sie $a = 0$; berechnen Sie die Reflektions- und Transmissionskoeffizienten des Potentials. (6P)

(d) Bei welchen Werten von α darf ein gebundener Zustand erwartet werden? Berechnen Sie den gebunden Zustand, d.h. bestimmen Sie den Eigenwert und die dazugehörige Eigenfunktion des Hamiltonoperators. (6P)

▷ **Aufgabe 4 (Spinologie)** (15 Punkte)

Gegeben ein Spin-1/2 Teilchen das im Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow_z\rangle + \frac{1+i}{2}|\downarrow_z\rangle \tag{3}$$

präpariert sei.

(a) Mit welcher W'keit wird bei einer s_z-Messung das Teilchen im Zustand $|\downarrow_z\rangle$ (also "z-antipolarisiert") gefunden? (3P)

(b) Mit welcher W'keit wird bei einer s_x-Messung das Teilchen im Zustand $|\uparrow_x\rangle$ (also "x-polarisiert") gefunden? (5P)

(c) Nun sei mit $\vec{e}_a := \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ eine räumliche Richtung ausgezeichnet, genannt die a-Richtung. Mit welcher W'keit wird bei einer s_a-Messung das Teilchen im Zustand $|\uparrow_a\rangle$ gefunden? (7P)

Zur Einnerung hier kurz die Pauli-Matrizen:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

▷ **Aufgabe 5 (Ritz Wandpendel)** (15 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m befinde sich im Potential

$$V(x) = \begin{cases} \frac{k}{2}x^2 & \text{für} \quad x \geq 0 \\ \infty & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}, \quad f > 0\,. \tag{5}$$

Der Hamiltonoperator des Systems liest sich (Ortsdarstellung)

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \tag{6}$$

(a) Bestimmen Sie mittels Variationsverfahren unter Verwendung der Variationsfunktionenschar $\{\psi_\kappa(x) = xe^{-\kappa x} | x \in \mathbb{R}_0^+, \kappa \in \mathbb{R}^+\}$ eine obere Grenze für die Grundzustandsenergie des Systems.

Hinweis: Nutzen Sie gegebenenfalls die Formel $\int_0^\infty dx x^n e^{-cx} = \frac{n!}{c^{n+1}}$, $c > 0$, für deren Beweis wir einen Extrapunkt spendieren.

(b) Geben Sie Gründe warum die Variationsfunktionen für die Problemstellung geeigent erscheinen.

(c) Das Problem ist exakt diagonalisierbar. Zeigen Sie $E_n = \left(2n + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega$ mit $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Wie vergleicht sich die exakte Grundzustandsenergie mit dem Resultat des Variationsverfahrens?

(d) Geben Sie ein physikalisches System an, das durch den Hamiltonoperator modelliert wird.

▷ Aufgabe 6 (Spindynamik) (15 Punkte)

Ein Spin-1/2 Teilchen, anfänglich im Zustand (3) präpariert, wird vor der abschließenden Messung durch ein Magnetfeld geschickt. Der Hamiltonoperator der Spin-Magnetfeld Wechselwirkung lautet

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\hat{\sigma}_z \quad , \tag{7}$$

(a) Berechnen Sie die Zeitentwicklung des Erwartungswertes von $\hat{\vec{s}} \equiv (\hat{s}_x, \hat{s}_y, \hat{s}_z)$.

(b) Mit welcher W'keit wird der Spin zur Zeit t im Zustand $|\uparrow_x\rangle$ (also "x-polarisiert") gefunden?