Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2014) -

Übungsblatt 01 ($20 + \pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 07.04.14 – Abgabe 15.04.14 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1 (Natrium und Licht) (8 Punkte)

Natriumdampflampen werden gerne zur Straßenbeleuchtung eingesetzt. Das Licht derartiger Lampen hat eine Wellenlänge $\lambda_D = 5.89 \times 10^{-7}$m.

(a) Was ist die Farbe des Lichtes bei dieser Wellenlänge? Welche Energie hat ein Photon bei dieser Wellenlänge?

(b) Wieviele Photonen werden von einer 100W Lampe pro Sekunde emittiert? [Nehme Sie grob vereinfachend an, dass alle elektrische Leistung in Licht der Wellenlänge λ_D umgesetzt wird.] Wieviele Photonen dieser Lampe treffen pro Sekunde auf eine 1qm Fläche auf dem Mond? [Sie dürfen annehmen, dass die Lampe ein idealer Kugelstrahler ist, und dass die Fläche auf dem Mond optimal orientiert ist, so dass sie möglichst viele Photonen empfängt.]

Das Licht einer Natriumdampflampe wird natürlich von Natriumatomen emittiert (Masse 3.82×10^{-26}kg). Der Impulssatz besagt, dass mit jeder Emission eines Photons das Atom einen Rückstoß erleidet. Für ein freies Atom, das anfänglich ruht:

(c) Was ist die Rückstoßgeschwindigkeit des Atoms? [Otto Frisch hat diesen Rückstoß 1933 vermessen.] Welche DeBroglie Wellenlänge hat das Atom wenn es sich mit der Rückstoßgeschwindigkeit bewegt?

(d) Hätten Sie eine Idee, wie man mit Licht Atome kühlen könnte? Bis zu welchen Temperaturen würde man da wohl kommen?

▷ Aufgabe 2 (Lineares Molekül)* (12 Punkte)

In einem einfachen Modell eines linearen Moleküls kann sich das Leuchtelektron effektiv nur in einer Dimension bewegen. Der Konfiguratinsraum des Elektrons ist das Intervall $X = [-a/2, a/2]$, seine Wellenfunktion von der Form

$$\Psi(x,t) = c_0 e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}\varphi_0(x) + c_1 e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\varphi_1(x)\,, \tag{1}$$

worin c_0, c_1 komplexe Zahlen, und φ_0, φ_1 sog *Orbitale*

$$\varphi_0(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos(\pi x/a)\,, \qquad \varphi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(2\pi x/a)\,, \tag{2}$$

für $x \in [-a/2, a/2]$, und $\varphi_0(x) = \varphi_1(x) = 0$ für $x \notin [a/2, -a/2]$.

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

(a) Bestätigen Sie, dass
$$|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1 \tag{3}$$
die Normierung garantiert.

(a) Beschreiben Sie – in Worten – wo das Elektron im Fall $c_1 = 0$ bzw. $c_0 = 0$ vornehmlich angefunden wird.

(b) Bestätigen Sie, dass im allgemeinen Fall die W'keitsdichte für eine Ortmessung
$$|\Psi(x,t)|^2 = |c_0|^2|\varphi_0(x)|^2 + |c_1|^2|\varphi_1(x)|^2 + c_0^* c_1 e^{-\frac{i}{\hbar}(E_1-E_0)t}\varphi_0^*(x)\varphi_1(x) + c_0 c_1^* e^{+\frac{i}{\hbar}(E_1-E_0)t}\varphi_0(x)\varphi_1^*(x)\,. \tag{4}$$
Welcher der Terme verschließt sich einer klassischen Interpretation "hat mit W'keit $|c_0|^2$ eine Dichte $|\varphi_0(c)|^2$ und mit W'keit $|c_1|^2$ eine Dichte $|\varphi_1(x)|^2$"?

(c) Für $c_0 c_1 \neq 0$ oszilliert die W'keitsdichte als Funktion der Zeit. Mit welcher Frequenz? Machen Sie sich ein Bild für den Spezialfall $\alpha_0 = \alpha_1 = 1/\sqrt{2}$ indem Sie die W'keitsdichte zu einigen aussagekräftigen Zeitpunkten t_i plotten.

(d) Berechnen Sie den Mittelwert und die Varianz der Ortsverteilung. Mittelwert und Varianz sind zeitabhängig. Machen Sie sich ein Bild (Plot!) für den Spezialfall $c_0 = c_1 = 1/\sqrt{2}$.

(e) Bestimmen Sie nun die Wellenfunktion und W'keitsdichte in der Imulsdarstellung. Beachten Sie, dass der Konfigurationsraum das Intervall $[-a/2, a/2]$, außerhalb dieses Intervalls also $\Psi(x,t) = 0$.

(f) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Impulsverteilung. Plotten Sie Ihr Resultat für den in (c) angegebenen Spezialfall. Was ergibt sich für das Produkt der Orts- und Impulvarianz?

▷ **Aufgabe 3 (Ein unmoralisches Angebot)** (π Punkte)

Aus dem Internet erreicht Sie ein Angebot für ein gezinktes Glücksrad, spezifiziert durch eine Wahrscheinlichkeitsdichte
$$\rho(\varphi) = \frac{1}{4}\left[\sin(\varphi/2) - \frac{1}{2}\sin\varphi\right], \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \tag{5}$$
zum Schnäppchenpreis von 99 Euro. Sie sind von der Aussicht, Ihre Bekannten beim Glückspiel übers Ohr zu hauen fasziniert, wollen aber sicher stellen, dass sich Ihre Investition auch lohnt.

- Handelt es sich bei (5) tatsächlich um eine Wahrscheinlichkeitsdichte (positiv? normiert?)? Vielleicht machen Sie sich ein Bild von $\rho(\varphi)$?
- Das Glücksrad kommt mit 64 Teilungsnägeln, alle im gleichen Abstand, einer bei $\varphi = 0$. Die entsprechenden Abschnitte sind durchnummeriert von 1 bis 64. Gespielt wird, indem man eine Zahl tippt, etwa 15. Bleibt das Rad auf 15 stehen, hat man gewonnen, andernfalls hat man verloren. Im Falle eines Gewinns erhält man bei einem

Einsatz von 1 Euro eine Auszahlung von 63 Euro (von der Bank).[2] Auf welche Zahl werden Sie setzen?

- Angenommen Sie haben das gezinkte Glücksrad gekauft und veranstalten nun fleissig Spieleabende mit Ihren Bekannten. Reihum übernimmt jeder Mitspieler mal für einen Abend die Bank. Gewinnt die Bank im Mittel? Wie sieht es mit Ihnen aus? Als einziger Mitspieler kennen Sie (5). Wie lange dauert es im Mittel, bis sich Ihre Investition amortisiert hat?

[2] Richtig! Langfristig gewinnt bei einem fairen Glcksrad immer die Bank (im Mittel einen Euro in 64 Spielen). Die hat ja auch Auslagen (Öl fürs Rad, Personal etc).