

Theoretische Physik III - Quantenmechanik (SoSe 2014) -

Übungsblatt 02 (20 + π Punkte)¹

Ausgabe 14.04.14 – Abgabe 22.04.14 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ **Aufgabe 1 (Darstellungswechsel)*** (6 Punkte)

Ein Teilchen, das sich in einer Raumdimension bewegt, sei in einem Zustand präpariert der sich in der Impulsdarstellung liest

$$\tilde{\psi}(k) = \begin{cases} c & a \leq k \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1)$$

- (a) Wie muss c gewählt werden, damit $\tilde{\psi}$ korrekt normiert? Berechnen Sie Mittelwert und Streuung der Messgröße Impuls.
- (b) Bestimmen Sie die Wellenfunktion in der Ortsdarstellung. Machen Sie sich ein Bild der entsprechenden Wahrscheinlichkeitsdichte! Berechnen Sie Mittelwert und Streuung der Messgröße Ort. Welcher Unschärferelation genügt das Produkt aus Orts- und Impulsstreuung?

▷ **Aufgabe 2 (Teilchen in der Kiste)*** (8 Punkte)

Ein Teilchen sei in einer würfelförmigen Kiste der Kantenlänge L frei beweglich eingeschlossen.

- (a) Bestimmen Sie die Energieniveaus und Eigenfunktionen. Zeigen Sie, daß die Energie-Eigenwerte (Energieniveaus) durch die Gleichung

$$E_{klm} = \epsilon \left((l+1)^2 + (m+1)^2 + (n+1)^2 \right), \quad l, m, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

mit $\epsilon = \hbar^2 \pi^2 / (2mL^2)$ gegeben sind, und die dazugehörigen Energie-Eigenfunktionen

$$\varphi_{klm}(x, y, z) = \left[\frac{2}{L} \right]^{\frac{3}{2}} \sin(k_l x) \sin(k_m y) \sin(k_n z), \quad k_l = \frac{(l+1)\pi}{L} \text{ etc}, \quad (3)$$

wobei die Kiste mit der unteren Ecke links vorne im Koordinatenursprung plaziert.

- (b) Welchen Druck übt das Teilchen im Grundzustand auf die Wände aus?
Zur Erinnerung: “Druck” ist “Kraft pro Fläche”. “Kraft” ist “Arbeit pro Wegstrecke”, und “Arbeit” ist sowas wie Energie. Bestimmen Sie also zunächst die Änderung der Grundzustandsenergie bei infinitesimaler Verschiebung einer der Wände.

¹Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

- (c) Wie groß dürfte \hbar allenfalls sein, um beim Öffnen handelsüblicher Melonen durch umherfliegende Melonenkerne nicht in Lebensgefahr zu geraten? Als theoretische Physikerin dürfen Sie annehmen, dass handelsübliche Melonen würfelförmig sind – was sie ja auch sind, vgl. Abbildung.



- (d) Überzeugen Sie sich davon, dass (i) die Energie-Niveaus um so dichter beieinander liegen, je größer die Kiste ist, und (ii) je höher die Energie, desto mehr Niveaus befinden sich in ihrer Nachbarschaft. Man sagt, im Grenzfall $L \rightarrow \infty$ entstehe ein quasi-kontinuierliches Energiespektrum. Bestimmen Sie für diesen Fall die Zustandsdichte, d.h. die Zahl der Niveaus, deren Energie im Energie-Intervall dE um E liegt.

▷ **Aufgabe 3 (Feynman-Propagator)** (6 Punkte)

Für einen freien Massepunkt in einer Raumdimension lautet die Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t). \quad (4)$$

Zeigen Sie, dass sich die allgemeine Lösung dieser Gleichung darstellen lässt

$$\Psi(x, t) = \int U(x, t; x', t') \Psi(x', t') dx', \quad (5)$$

worin $\Psi(\cdot, t')$ eine für den Zeitpunkt t' spezifizierte Anfangsbedingung, und der Integralkern U gegeben ist

$$U(x, t; x', t') = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t-t')}} \exp \left\{ \frac{im(x-x')^2}{2\hbar(t-t')} \right\}. \quad (6)$$

Bemerkung: Der Integralkern heißt in der allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen auch *Green'sche Funktion*. Für den speziellen Fall der (freien) Schrödingergleichung läuft U auch unter der Bezeichnung *Feynman-Propagator*.

▷ **Aufgabe 4 (Quantendiffusion)** (π Punkte)

Ihr Freund ist besorgt. Er schläft in einem Hochbett und befürchtet, aufgrund der Quantendiffusion seines Wellenpaketes morgens auf dem Boden aufzuwachen (möglicherweise, so seine konkrete Befürchtung, mit blauen Flecken).

- (a) Versuchen Sie, Ihren Freund zu beruhigen.
Hinweis: Modellieren Sie Ihren Freund als Gauss'sches Wellenpaket. Benutzen Sie die Relation $m\Delta v^2/2 \sim k_B T$, die Sie in der statistischen Mechanik kennenlernen werden, um die anfängliche Geschwindigkeits-Unschärfe Ihres Freundes der Masse m mit seiner Körpertemperatur T in Beziehung zu setzen (k_B ist die Boltzmann-Konstante).

- (b) Wie lange müsste Ihr Freund gewohnheitsmäßig schlafen, um im Mittel jedes zweite mal neben seinem Bett aufzuwachen?
- (c) Geben Sie eine Einschätzung ob die unter (b) gefundene Antwort realistisch erscheint. Begründen Sie Ihre Einschätzung. Sollten Sie zum Schluss kommen “unrealistisch” – woran könnte das liegen, also: an welcher Stelle ist das Modell inadäquat?