Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2014) -

Übungsblatt 05 ($23 + \pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 15.05.14 – Abgabe 20.05.14 – Besprechung n.V.

▷ Aufgabe 1 (Drehimpulsunschärfen)* (3 Punkte)

Berechnen Sie die Varianzen der x- und y-Komponenten des Drehimpulses in Standardzuständen $|\ell m\rangle$.

▷ Aufgabe 2 ($3D$ Harmonischer Oszillator) (6 Punkte)

Man bestimme die Eigenfunktionen und Eigenwerte des isotropen harmonischen Oszillators mittels (1) Separation in kartesischen Koordinaten und (2) Separation in Kugelkoordinaten. Man finde eine Formel für den Entartungsgrad der Eigenwerte und klassifiziere das Spektrum nach (1) kartesischen Anregungsquantenzahlen und (2) Drehimpulsquantenzahlen.

▷ Aufgabe 3 (Auswahlregeln) (6 Punkte)

Die Wechselwirkung (engl. interaction) eines Atoms mit dem elektrischen Feld wird in der sog Dipolnäherung beschrieben

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\vec{E} \cdot \hat{\vec{D}} \tag{1}$$

worin $\hat{\vec{D}}$ der Vektoroperator Dipolmoment, im Falle atomaren Wasserstoffs $\hat{\vec{D}} = -e\hat{\vec{q}}$.

Für atomaren Wasserstoff (ohne Spin): Berechnen Sie die Matrixelemente $\langle nlm|\hat{H}_{\text{int}}|n'l'm'\rangle$. Überzeugen Sie sich insbesondere von den sog *Auswahlregeln*

$$\Delta l \equiv l - l' = \pm 1\,, \qquad \Delta m \equiv m - m' = 0, \pm 1\,. \tag{2}$$

Auswahlregeln spielen eine prominente Rolle bei der Wechselwirkung von Materie (= Haufen von Atomen) mit Licht. Lesen Sie aus den Auswahlregeln eine Hypothese für den Eigendrehimpuls (=Spin) des Photons ab.

▷ Aufgabe 4 (Paulimatrizen und Spin-$1/2$)* (8 Punkte)

Gegeben die sog *Paulimatrizen*

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

(a) Zeigen Sie: Die durch

$$\hat{s}_a = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_a\,, \qquad a = x, y, z \tag{4}$$

definierten Operatoren genügen der Drehimpulsalgebra.
<u>Bemerkung:</u> Angesichts dieser Tatsache dürfen die drei Operatoren $\hat{\sigma}_a$, bzw. $\hat{s}_a$, als

---

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

kartesische Komponenten eines Euklidischen Vektoroperators $\hat{\vec{\sigma}}$, bzw. $\hat{\vec{s}}$, aufgefasst werden, genannt *Paulispin*. Vektoroperator heisst in diesem Zusammenhang, dass sich seine Komponenten unter Drehungen des Koordinatensystems wie kartesische Komponenten des Koordinatenvektors transformieren.

(b) Die Länge des Spins sei durch $\hat{\vec{s}}^2 = \hat{s}_x^2 + \hat{s}_y^2 + \hat{s}_z^2$ definiert. Wie lautet seine Matrixdarstellung?

(c) Zeigen Sie: Für kartesische Komponenten $\hat{\sigma}_a$, $a = x, y, z$ gilt:

$$\hat{\sigma}_a\hat{\sigma}_b = i\hat{\sigma}_c\,, \qquad \hat{\sigma}_a\hat{\sigma}_b\hat{\sigma}_c = i\hat{1}\,, \qquad (abc = xyz \text{ zyklisch})\,. \tag{5}$$

(d) Es sei $\vec{a}$ ein Euklidischer Einheitsvektor, und $\hat{\sigma}_a = \vec{a}\cdot\hat{\vec{\sigma}}$ die kartesische Komponente des Paulispins in $\vec{a}$-Richtung. Zeigen Sie:

$$\hat{\sigma}_a^2 = \hat{1}\,, \qquad \mathrm{Tr}\,\{\hat{\sigma}_a\} = 0\,, \qquad \mathrm{Det}\,\{\hat{\sigma}_a\} = -1\,, \tag{6}$$

wobei Tr die Spur (engl. *trace*), d.h. die Summe der Diagonalelemente, und Det die Determinante, d.h. das Produkt der Eigenwerte bezeichnet.

(e) Was sind die Eigenwerte von $\hat{\sigma}_a$?

(f) Seien nun mit $|0\rangle$, $|1\rangle$ die Eigenvektoren von $\hat{\sigma}_z$ zu den Eigenwerten $\sigma = -1$, $\sigma = +1$, und $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ein Zustandsvektor. Welche Bedeutung haben die komplexen Koeffizienten α, β?

(g) Wir betrachten nun die Messung von $\hat{\sigma}_x$ im Zustand $|\psi\rangle$ wie in (f). Welche Messwerte dürfen mit welcher Wahrscheinlichkeit erwartet werden?

(h) Für den in (f) spezifizierten Zustand wird nun eine Messung von $\hat{\sigma}_z$ gefolgt von einer Messung von $\hat{\sigma}_x$ analysiert. Was können Sie über die zu erwartenden Messresultate sagen?

▷ Aufgabe 5 (Noch mehr Spinologie ...) (π Punkte)

[“Freiwillig”, aber nützlich, und möglicherweise klausurrelevant ...]

Betrachte den Operator

$$\hat{U}_{\phi\vec{n}} := \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\phi\vec{n}\cdot\hat{\vec{s}}\right\} \tag{7}$$

wobei $\vec{n}$ Euklidischer Einheitsvektor, ϕ reell und $\hat{\vec{s}}$ der Spinvektoroperator eines Spin-1/2 Teilchens.

Wie lautet $\hat{U}$ in der Standard-Matrixdarstellung?

<u>Hinweis:</u> Sie werden sich doch an die Reihendarstellung der e-Funktion erinnern? Möglicherweise auch an $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$? Und wenn Sie sich jetzt noch (6) vergegenwärtigen sind Sie auch schon fertig ...