Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2014) -

Übungsblatt 07 (π^e Punkte)[1]

Ausgabe 26.05.14 – Abgabe 03.06.14 – Besprechung n.V.

▷ **Aufgabe 1 (Diracs Ladungsquantisierungsargument)** (π^e Punkte)

[Diese Aufgabe ist freiwillig. Sie dient ausschließlich ihrer Bildung ...]

Schon in den Anfangstagen der Quantenmechanik hat Dirac auf einen interessanten Zusammenhang zwischen der Eichinvarianz der Quantenmechanik und der Quantisierung der elektrischen Ladung hingewiesen: wenn es nur einen *einzigen* magnetischen Monopol auf dieser Welt gibt, und die Quantenmechanik die theoretischen Grundlagen dieser Welt formuliert, so ist die elektrische Ladung notwendigerweise quantisiert.

Ein magnetischer Monopol der Stärke g gibt Anlass zu einer magnetischen Flussdichte $\vec{B}_g$; für einen im Ursprung plazierten Monopol

$$\vec{B}_g(\vec{x}) = \frac{g}{4\pi}\frac{1}{r^2}\vec{e}_r \tag{1}$$

worin $r = |\vec{x}|$ und $\vec{e}_r = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ radialer Einheitsvektor.

(a) Machen Sie sich mal ein Bild!

(b) Bestätigen Sie

$$\mathrm{div}\vec{B}_g = 0 \quad \text{für alle } \vec{x} \neq 0 \tag{2}$$

(c) In Gebieten, die den Aufenthaltsort des Monopols nicht umfassen, sollte es also ein Vektorpotential $\vec{A}$ geben, vermittels dessen $\vec{B}_g = \mathrm{rot}\vec{A}$. Wegen div rot = 0 wäre in solchen Gebieten dann $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ garantiert, wie gefordert. Bestätigen Sie

$$\vec{A}_{\mathrm{I}} = \frac{g}{4\pi}\frac{1-\cos\vartheta}{r\sin\vartheta}\vec{e}_\varphi \tag{3}$$

wie gewünscht $\mathrm{rot}\vec{A}_{\mathrm{I}} = \vec{B}_g$. Da $\vec{A}_{\mathrm{I}}$ für $\vartheta \to \pi$ aber divergiert, ist hier für den Definitionsbereich D_{I} von $\vec{A}_{\mathrm{I}}$ ein nach unten offener Kegel $\pi \geq \vartheta > \pi - \varepsilon$ aus dem $\mathbb{R}^3$ auszuschließen.

(d) Bestätigen Sie, dass auch

$$\vec{A}_{\mathrm{II}} = -\frac{g}{4\pi}\frac{1+\cos\vartheta}{r\sin\vartheta}\vec{e}_\varphi \tag{4}$$

$\mathrm{rot}\vec{A}_{\mathrm{II}} = \vec{B}$ liefert, allerdings ist nun für den Definitionsbereich D_{II} aus dem $\mathbb{R}^3$ ein nach oben offener Kegel $0 \leq \vartheta < \varepsilon$ auszuschließen.

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

(e) Auf dem Durchschnitt der Definitionsbereiche unterscheiden sich die beiden Potentiale

$$\vec{A}_{\mathrm{II}} - \vec{A}_{\mathrm{I}} = -\frac{2g}{4\pi}\frac{1}{r\sin\vartheta}\vec{e}_{\varphi}\,. \tag{5}$$

Bestätigen Sie, dass der Unterschied ein Gradient ist,

$$\vec{A}_{\mathrm{II}} - \vec{A}_{\mathrm{I}} = \mathrm{grad}\chi \tag{6}$$

mit

$$\chi = -\frac{2g}{4\pi}\varphi\,. \tag{7}$$

(f) Wellenfunktionen sind über eine Eichtrafo verknüpft,

$$\psi_{\mathrm{II}} = \exp\left\{-i\frac{2eg}{4\pi\hbar}\varphi\right\}\psi_{\mathrm{I}}\,. \tag{8}$$

Die Verknüpfung ist allerdings mehrdeutig. Bestätigen Sie, dass Eindeutigkeit nur garantiert ist, sofern

$$\frac{2eg}{4\pi\hbar} = n\,, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{9}$$

Lies: gibt es einen Monopol der Stärke g ist die elektrische Ladung quantisiert mit Elementarladung $e \propto 1/g$ (und vice versa).

In der E-Dyn Vorlesung haben Sie gelernt $\mathrm{div}\vec{B} = 0$. Streng genommen kann das nur für die von uns zugänglichen Raumbereiche behauptet werden – das Praktiksumlabor, etwa. Ob auch auf dem Sirius $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ steht in den Sternen. Hätten Sie eine Idee, wie die Maxwell'sche Theorie zu erweitern wäre, wenn sich herausstellt, dass es tatsächlich magnetische Monopole gibt?