Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2014) -

Übungsblatt 09 (20+π Punkte)[1]

Ausgabe 13.06.14 – Abgabe 17.06.14 – Besprechung n.V.

▷ Aufgabe 1 (HO mit Heisenberg) (4 Punkte)

["Pflicht" und klausurrelevant ...]

Wir betrachten den harmonischen Oszillator im konstanten Kraftfeld. Die Hamiltonfunktion lautet

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 - Fq \tag{1}$$

mit F eine reelle Konstante.

(a) Stellen Sie die klassischen Bewegungsgleichungen auf. Geben Sie die allgemeine Lösung an.

(b) Quantisieren Sie das System. Stellen Sie die Heisenberg'schen Bewegungsgleichungen auf, und geben Sie die Lösung an.

Hinweis: Es ist hilfreich beizeiten ein quadratische Ergänzung vorzunehmen, $\frac{m\omega^2}{2}q^2 - Fq = \frac{m\omega^2}{2}\left(q - \frac{F}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{F^2}{2m\omega^2}$.

▷ Aufgabe 2 (Geschwindigkeitsoperator)* (6 Punkte)

[Freiwillig – aber eine gute Übung für den Umgang mit Kommutatoren ...]

In Anlehnung an die klassische Mechanik ist der quantenmechanische Geschwindigkeitsoperator definiert

$$\hat{\vec{v}} := \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{\vec{q}}\right] . \tag{2}$$

wobei $\hat{\vec{q}}$ den Ortsoperator und $\hat{H}$ den Hamiltonoperator bezeichnet. Für ein Teilchen der Masse m und Ladung e im elektromagnetischen Feld,

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\hat{\vec{p}} - e\vec{A}(\hat{\vec{q}}, t)\right]^2 + e\Phi(\hat{\vec{q}}, t) . \tag{3}$$

worin $\Phi, \vec{A}$ das Potential des Feldes.

Zeigen Sie

(a)

$$\hat{\vec{v}} = \frac{1}{m}\left[\hat{\vec{p}} - e\hat{\vec{A}}\right] . \tag{4}$$

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

(b)
$$[\hat{q}_i, \hat{v}_j] = i\frac{\hbar}{m}\delta_{ij} \tag{5}$$
worin $i, j = x, y, z$ kartesischer Index.

(c)
$$[\hat{v}_i, \hat{v}_j] = i\frac{\hbar e}{m^2}\epsilon_{ijk}B_k \tag{6}$$
wobei ϵ_{ijk} den vollständig antisymmetrischen Einheitstensor bezeichnet, und $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ (Magnetfeld).

Bemerkung: Zuweilen wird diese Identität in der Form $\hat{\vec{v}} \times \hat{\vec{v}} = i\hbar e/(m^2)\vec{B}$ notiert.

▷ **Aufgabe 3 (Bewegung im Magnetfeld/Quanten-Hall-Effekt)** (10 Punkte)

[Freiwillig – und ein ziemlicher Brummer ...]

Wir betrachten ein geladenes Punktteilchen (Masse m, Ladung e) im homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Der Hamiltonoperator lautet
$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\hat{\vec{p}} - e\vec{A}(\hat{\vec{q}})\right]^2 , \tag{7}$$
mit $\frac{\partial}{\partial \hat{\vec{q}}} \times \vec{A} = \vec{B}$.

(a) Stellen Sie die *klassischen* Bewegungsgleichungen auf, lösen Sie sie, und verifizieren Sie, daß sich das Teilchen mit der Zyklotronfrequenz
$$\omega_{\mathrm{c}} = \frac{eB}{m} \tag{8}$$
auf einer Kreisbahn bewegt. Was ist die Energie des Teilchens?

(b) Definieren Sie Operatoren
$$\hat{X}_0 = \hat{q}_x + \hat{v}_y/\omega_{\mathrm{c}}\,, \tag{9}$$
$$\hat{Y}_0 = \hat{q}_y - \hat{v}_x/\omega_{\mathrm{c}}\,, \tag{10}$$
wobei $\hat{\vec{v}}$ der in Aufgabe (1) definierte Geschwindigkeitsoperator ist. Beweisen Sie
$$\left[\hat{H}, \hat{X}_0\right] = 0\,, \tag{11}$$
$$\left[\hat{H}, \hat{Y}_0\right] = 0\,, \tag{12}$$
$$\left[\hat{X}_0, \hat{Y}_0\right] = -i\frac{e}{|e|}a_{\mathrm{m}}^2\,, \tag{13}$$
wobei $a_{\mathrm{m}} = [\hbar/(|e|B)]^{1/2}$ die sog. *magnetische Länge* bezeichnet. Was ist die physikalische Bedeutung der Operatoren $\hat{X}_0$, $\hat{Y}_0$?

Hinweis: Die physikalische Bedeutung erkennen Sie nach einem kurzen Blick auf Ihre Lösung von (a). Übrigens: X_0, Y_0 nennt man auch *Orbitzentrumskoordinaten* ...

(c) Beweisen Sie die Unschärferelation der Orbitzentrumskoordinaten

$$\delta X_0 \delta Y_0 \geq \frac{1}{2} a_{\mathrm{m}}^2 \,. \tag{14}$$

Behalten Sie in Erinnerung: ein geladenes Teilchen im Magentefeld beansprucht eine Fläche umgekehrt proportional dem Magnetfeld.

(d) Drücken Sie den Hamiltonoperator (7) durch den in Aufgabe (1) definierten Geschwindigkeitsoperator aus. Benutzen Sie die Algebra des Geschwindigkeitsoperators um die Eigenwerte von $\hat{H}$ zu bestimmen, (2 Punkte)

$$E_n(v_z) = (n + 1/2)\hbar|\omega_c| + m v_z^2/2 \,. \tag{15}$$

Hinweis: $\hat{H}$ ist quadratisch in $\hat{v}_x$ und $\hat{v}_y$ wobei der Kommutator von $\hat{v}_x$ und $\hat{v}_y$ dem kanonischen Kommutator eines 1D Punktteilchens gleicht ... offensichtlich hat man es bei der Bewegung in der xy-Ebene formal mit einem harmonischen Oszillator zu tun.

(e) Um auch die Eigenfunktionen von $\hat{H}$ zu bestimmen wählen Sie die sog *Landau-Eichung* $A_x = -yB$, $A_y = A_z = 0$. Lösen Sie die dazugehörige stationäre Schrödingergleichung in der Ortsdarstellung.

(f) In der Landau-Eichung lauten die Lösungen der stationären Schrödingergleichung

$$\psi(x, y, z) = \mathcal{N} e^{i(k_x x + k_z z)}\, H_n((y - y_0)/a_{\mathrm{m}})\, e^{-(y-y_0)^2/a_{\mathrm{m}}^2} \,, \tag{16}$$

wobei $y_0 = -\hbar k_x/(eB)$, $\mathcal{N}$ eine Normierungskonstante, und H_n Hermitepolynom. Was ist die Bedeutung der Quantenzahlen k_x, k_z, n?

Hinweis: Studieren Sie die Orbitzentrumsoperatoren $\hat{X}_0$, $\hat{Y}_0$ in der Landau-Eichung ...

(g) Schätzen Sie die Entartung der Landauniveaus (15) für ein großes System mit periodischen Randbedingungen ab. Vielleicht lassen Sie sich von den in (c) gesammelten Erfahrungen inspirieren ...

Bemerkung: Das in dieser Aufgabe studierte System spielt eine wichtige Rolle beim sog. *Quanten-Hall Effekt*. Eine gute Einführung vermittelt M. Janßen, O. Viehweger, U. Fastenrath und J. Hajdu *Introduction to the Theory of the Integer Quantum Hall Effect*, VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim (1994).

▷ **Aufgabe 4 (Ankunftszeit)** (π Punkte)

Für ein Teilchen mit einem räumlichen Freiheitsgrad (Ort q, Impuls p) vermittelt die Phasenraumfunktion

$$T(q, p) := -\frac{mq}{p} \tag{17}$$

die sog *Ankunfstzeit* des freien Teilchens im Ursprung $x = 0$. Begründen Sie die Taufe.

Erinnern Sie sich jetzt bitte an das Korrespondenzprinzip um einen Operator "Ankunftszeit"

$$\hat{T} := -m\hat{p}^{-1/2}\hat{q}\hat{p}^{-1/2} \tag{18}$$

für die Quantenmechanik zu verabreden.

(a) Ist dieser Operator auf einem geeignet gewählten Definitionsbereich $\mathcal{D}_T \subseteq \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, dx)$ symmetrisch? Gar selbstadjungiert? Wo gibt es Probleme?

(b) Was wären die verallgemeinerten Eigenfunktionen bzw Eigenwerte?

Hinweis: Vielleicht arbeiten Sie in der Impulsdarstellung ...

Ein Theorem von Pauli besagt, dass es für Hamiltonoperatoren $\hat{H}$, die nach unten beschränkt sind, es keinen selbstadjungierten Operator "Zeit" $\hat{t}$ gibt mit $[\hat{H}, \hat{t}] = i\hbar$. Die legendäre "Energie-Zeit" Unschärferelation (im Lehrbuch nachschlagen) lässt sich demzufolge nicht im Sinne der Heisenbergschen Unfschärferelation verstehen ...

(c) Berechnen Sie nun den Kommutator $[\hat{H}, \hat{T}]$ für freie Teilchen $\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2$. Konfrontieren Sie Ihr Resultat mit Paulis Theorem. Nun noch mal die Frage: ist $\hat{T}$ selbstadjungiert?