

Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2014) -
 Übungsblatt 10 (20 Punkte)
 Ausgabe 19.06.14 – Abgabe 25.06.14 – Besprechung n.V.
 Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ **Aufgabe 1 (Spin-Multipletts)** (6 Punkte)

[Klausurrelevant]

Bei der Kopplung zweier Spin-1/2 sind Ihnen das Spin-Singlett

$$|00\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_z \downarrow_z\rangle - |\downarrow_z \uparrow_z\rangle) \quad (1)$$

und Spin-Triplett begegnet,

$$|1, -1\rangle = |\downarrow_z \downarrow_z\rangle, \quad (2)$$

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_z \downarrow_z\rangle + |\downarrow_z \uparrow_z\rangle) \quad (3)$$

$$|1, +1\rangle = |\uparrow_z \uparrow_z\rangle. \quad (4)$$

Zeigen Sie:

- (a) Das Singlett ist invariant unter Drehungen. Alternativ

$$|\uparrow_a \downarrow_a\rangle - |\downarrow_a \uparrow_a\rangle = |\uparrow_b \downarrow_b\rangle - |\downarrow_b \uparrow_b\rangle \quad (5)$$

worin $|\uparrow_a\rangle$ Eigenzustand von $\hat{\sigma}_a := \vec{a} \cdot \vec{\sigma}$ zum Eigenwert $+1$, und \vec{a} normierter Euklidischer Einheitsvektor in “ a -Richtung” (dito für b).

- (b) Das Triplett transformiert unter Drehungen wie die (zirkuläre) Basis eines dreidimensionalen Euklidischen Vektorraums (den Sie mit dem Raum der “Ortsvektoren“ identifizieren dürfen).

▷ **Aufgabe 2 (Zwei-Niveau Atom im Lichtfeld)** (7 Punkte)

Das “Zwei-Zustands System”, auch genannt “2-Niveau Atom”, “Spin im Magnetfeld” oder “qubit” ist charakterisiert durch einen zwei-dimensionalen Hilbertraum mit Basiszuständen $|e\rangle, |g\rangle$ (im Kontext Atomphysik) und einen Hamiltonoperator, der – in der sog *Drehwellennäherung* – formuliert werden kann

$$\hat{H}(t) = \hbar\omega_0 \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + \frac{\hbar\Omega_0}{2} e^{i\omega t} \hat{\sigma} + \frac{\hbar\Omega_0^*}{2} e^{i\omega t} \hat{\sigma}^\dagger \quad (6)$$

worin $\hat{\sigma} = |g\rangle\langle e|$.

- (a) Ich behaupte, die durch \hat{H} beschriebene Dynamik haben Sie schon mal analysiert. Wann war das, und in welchem Kontext?

- (b) Wie lauten die Heisenberg-Bewegungsgleichungen der Operatoren $\hat{\sigma}$, $\hat{\sigma}^\dagger$?
- (c) Welche physikalische Bedeutung haben die Erwartungswerte von $\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^\dagger$ und $\hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}$?
- (d) Die explizite Zeitabhängigkeit von $\hat{H}(t)$ ist natürlich unangenehm. Um damit fertig zu werden empfiehlt sich ein Wechselwirkungsbild mit “ungestörtem” Hamiltonoperator $\hat{H}_0 := \hbar\omega\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}$. Wie transformiert sich $\hat{H}(t)$ unter diesem Bildwechsel? Ist es möglich, dass im Wechselwirkungsbild die Schrödingergleichung für den transformierten Zustand $|\tilde{\psi}(t)\rangle := e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}|\psi(t)\rangle$ in etwa lautet $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\tilde{\psi}\rangle = \tilde{H}|\tilde{\psi}\rangle$ mit

$$\tilde{H} = \hbar(\omega_0 - \omega) + \frac{\hbar\Omega_0}{2}\hat{\sigma} + \frac{\hbar\Omega_0^*}{2}\hat{\sigma}^\dagger \quad (7)$$

- (e) Für ein Atom das sich anfänglich im Grundzustand befindet bestimme man die W'keit, dass es zur Zeit t im angeregten Zustand gefunden wird.
- (f) Zum Hamiltonoperator \tilde{H} kann man natürlich auch wieder die entsprechenden Heisenbergschen Bewegungsgleichungen aufstellen – und sogar lösen! Wir bitten darum ...

▷ **Aufgabe 3 (Hyperfeinstruktur)** (7 Punkte)

[Was die HFS ist, und wo sie herkommt, sollte man wissen ...]

In der Hyperfeinstruktur (HFS) wird die Wechselwirkung zwischen dem Elektronenspin und dem Protonenspin (Fall: atomarer Wasserstoff) berücksichtigt. Das magnetische Moment des Protons, $\vec{\mu}_p = \gamma_p \vec{s}_p$, $\gamma_p \approx 2,79e_0/m_p$, erzeugt am Ort \vec{x} ein Magnetfeld

$$\vec{B}_p(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left(\vec{\mu}_p - 3\frac{(\vec{\mu}_p \cdot \vec{x})\vec{x}}{r^2} \right) + \frac{2\mu_0}{3}\vec{\mu}_p\delta(\vec{x}). \quad (8)$$

wobei angenommen wurde, dass das Proton im Ursprung plaziert ist, und $r = |\vec{x}|$.

Die Einstellenergie des magnetischen Moments des Elektrons, $\mu_e = -\gamma_e \vec{s}_e$, $\gamma_e = e_0/m_e$ (Annahmen: $g = 2$), lautet

$$\hat{H}_{\text{HFS}} = -\hat{\vec{\mu}}_e \cdot \vec{B}_p(\hat{q}) \quad (9)$$

Um den Effekt auf den Grundzustand von Wasserstoff abzuschätzen behandeln wir \hat{H}_{HFS} hinsichtlich der Translationsfreiheitsgrade des Elektrons in erster Ordnung Störungstheorie, behalten aber die Spinfreiheitsgrade bei. Bei der Mittlung des Magnetfeldes über die Gewichtsfunktion $|\psi_{100}(\vec{x})|^2$ trägt nur der Kontaktterm bei (warum?), und daher

$$\hat{H}_{\text{HFS}} = -\frac{2\mu_0}{3}\hat{\vec{\mu}}_e\hat{\vec{\mu}}_p|\psi_{100}(0)|^2 = \frac{A}{\hbar^2}\hat{s}_e \cdot \hat{s}_p \quad (10)$$

worin

$$A = \frac{16}{3} \times 2,79 \frac{m_e}{m_p} \alpha^2 E_{\text{Ry}} \approx 5,87 \times 10^{-6} \text{eV}. \quad (11)$$

bzw $\nu = A/h \approx 1417\text{MHz}$ oder $\lambda = c/\nu \approx 21\text{cm}$.

- (a) Zeigen Sie dass der Hamiltonoperator (10) zu Eigenwerten und Eigenzuständen Anlass gibt

$$\begin{aligned} E_+ &= E_0 + A/4 && \text{im Triplet } |S = 1, M\rangle, M = -1, 0, 1, \\ E_- &= E_0 - 3A/4 && \text{im Singlet } |S = 0, M = 0\rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

- (b) In einem äußeren Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ spaltet das Triplet auf und das Singlet wird verschoben. Berechnen Sie – exakt! – diese Aufspaltung/Verschiebung als Funktion der Magnetfeldstärke (die Kopplung des Protonenspins an das Feld dürfen Sie dabei getrost vernachlässigen. Warum?). Machen Sie sich ein Bild (Energiewerte vs B), identifizieren das “Zeeman-Regime” kleiner Feldstärken und das Paschen-Back Regime großer Feldstärken.

Bemerkung: Die Hyperfeinstruktur im Grundzustand von atomarem Wasserstoff spielt in der Astrophysik eine wichtige Rolle (21cm-Linie), und wird gerne für Tests der allgemeinen Relativitätstheorie verwendet (gravitative Rotverschiebung). Der Hyperfeinübergang im Cs-133 Isotop dient der Definition der Sekunde: eine Sekunde sind genau 9 192 631 770 Perioden der entsprechenden Linie. Der Übergang ist übrigens äußerst schwach, da elektrisch Dipol-verboten, mit einer Lebensdauer $\sim 3,5 \times 10^{14} \text{sec} \sim 10^7 \text{Jahre}$ (aufgrund magnetischer Dipol- und elektrischer Quadrupolübergänge).

Im übrigen bezieht sich die Platte der Pionier 10 Mission, die die Nachricht von unserer Zivilisation ins All trägt, auf die Hyperfeinstruktur von atomarem Wasserstoff um eine Längen und Zeitskala zu kommunizieren ...