Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2014) -

Übungsblatt 11 ($20 + 0$ Punkte)
Ausgabe 26.06.14 – Abgabe 02.07.14 – Besprechung n.V.
Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1 (Länderfusion Berlin-Brandenburg) (2 Punkte)

In Berlin und in Potsdam hat man je ein Elektron in einer Falle eingesperrt und dort präpariert – in Potsdam im Zustand ϕ, in Berlin im Zustand χ. Die Potsdamer nennen ihr Elektron liebevoll "Fritzchen", die Berliner das ihrige zärtlich "Marlene". In der Länderfusionskommission wird der Zustand des Zwei-Elektronensystems gemäß

$$|\Psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle \tag{1}$$

zu den Akten genommen, wobei der erste Faktor den Zustand von Fritzchen, der zweite Faktor den Zustand von Marlene beschreibt.

Da kommt ein naseweiser Professor, und behauptet das ganze wäre unzulässig – schließlich wären Elektronen grundsätzlich ununterscheidbare Fermionen. Der Zustand müsse also in Form

$$|\Psi\rangle \propto |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle - |\chi\rangle \otimes |\phi\rangle \tag{2}$$

notiert werden, und von "Fritzchen" und "Marlene" dürfe man gleich garnicht reden.

Angesichts Ihrer erstklassigen Ausbildung in Physik werden Sie nun zum Schiedsrichter berufen und sollen den Streit schlichten. Hat der Professor Recht oder kann man mit der Entscheidung der Länderfusionskommission leben?

▷ Aufgabe 2 (Gesellige Bosonen) (2 Punkte)

[Total Klausurrelevant . . .]

Bosonen unterliegen nicht dem Pauli-Verbot, und so könnte man meinen, Bosonen seien ziemlich gewöhnliche Zeitgenossen. Das ist aber ein Irrtum: während sich Fermionen gegenseitig aus dem Weg gehen, sind Bosonen über die Maßen gesellige Wesen. Betrachten wir das einfache Beispiel zweier Bosonen, die zwei orthogonale Orbitale ϕ und χ besetzen können. Wären die beiden Teilchen unterscheidbar – man nennt sie dann *Boltzonen* –, so könnte das Zwei-Teilchensystem in einem der vier Zustande $\phi\phi$, $\phi\chi$, $\chi\phi$ oder $\chi\chi$ gefunen werden, in der Hälfte der Fälle also im gleichen Zustand.

Zeigen Sie, dass wenn es sich bei den beiden um Bosonen handelt, sie in 2/3 der Fälle im gleichen Zustand zu finden sind.

Bemerkung: Verglichen mit ihren klassischen Vettern, den *Boltzonen*, habe Bosonen also eine natürliche Tendenz zusammen zu klumpen, engl *bunching*. Diese Tendenz, die sich allerdings erst bei niedrigen Temperaturen bemerkbar macht, ist für viele interessante Effekte der Tieftemperaturphysik verantwortlich, angefangen bei der Bose-Einstein Kondensation bis hin zur Supraleitung. Wem der Gang in ein Tieftemperaturlabor zu anstrengend ist, kann wahlweise auch mal in der Photonik vorbeischauen. Auch die Photonen die beispielsweise von einem Laser erzeugt werden, haben die Tendenz zu Klumpen . . .

▷ **Aufgabe 3 (Ideales Fermigas bei $T = 0$)** (10 Punkte)

Die folgenden Ausführungen handeln vom idealen Fermigas, und sind daher mit Fug und Recht “Bachelor-Stoff”. In Quanten-II werden wir sie nutzen, um damit die Thomas-Fermi Theorie der Atome und der weißen Zwerge zu entwickeln, die Chandrasekhar-Masse zu bestimmen usw.

Wir betrachten ein ideales Spin-1/2 Fermigas aus N Teilchen in einem Volumen V, also etwa Leitungselektronen in einem Festkörper. Von der Coulombwechselwirkung der Elektronen untereinander wie auch mit dem Ionengitter sei zunächst abgesehen. Das System befinde sich im Grundzustand bei $T = 0$ Kelvin.

(a) Unter Annahme periodischer Randbedinungen bestätige man die Eigenwerte der Einteilchen Energie

$$\varepsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} \tag{3}$$

wo $\vec{k}$ diskrete Wellenvektoren, für periodische Randbedingungen

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L}\vec{n}, \qquad \vec{n} \in \mathbb{Z}^3 \,. \tag{4}$$

Wie würden Sie die dazugehörigen Einteilchenorbitale notieren?

Unter der Annahme, dass der Spin energetisch keine Rolle spielt, kann nach dem Pauliprinzip jeder Impulszustand, angefangen beim Impulszustand $\hbar\vec{k} = (0, 0, 0)$ zweifach besetzt werden. Die Imulszustände liegen in einer “Impulskugel” vom Radius $p_{\mathrm{F}} := \hbar k_{\mathrm{F}}$, die sog *Fermikugel.* Der Radius dieser Kugel ergibt sich aus der Zahl der Impulszustände in der Fermikugel, die – wegen Spinentartung mit 2 multipliziert – mit der Gesamtzahl der Teilchen identifiziert wird.

(b) Zeigen Sie: Im Kontinuumlimes

$$N = 2 \sum_{\vec{k}}^{|\vec{k}| \le k_{\mathrm{F}}} = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{3} k_{\mathrm{F}}^3 \tag{5}$$

und also Teilchenzahldichte

$$n \equiv N/V = \frac{k_{\mathrm{F}}^3}{3\pi^2} \,. \tag{6}$$

(c) Die Grundzustandsenergie erhält man durch Summation der Einteilchenenergien. Bestätigen Sie für den Kontinuumlimes

$$E_0 = 2 \sum_{\vec{k}}^{|\vec{k}| \le k_{\mathrm{F}}} \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} = N \frac{3}{5} \varepsilon_{\mathrm{F}} \tag{7}$$

worin ε_{F} die sog *Fermi-Energie*,

$$\varepsilon_{\mathrm{F}} = \frac{\hbar^2 k_{\mathrm{F}}^2}{2m} \tag{8}$$

<u>Bemerkenswert</u> ist hier, dass die mittlere Energie pro Teilchen, E_0/N, von Ordnung der maximalen Einteilchenenergie ε_{F}: Ist die Teilchenzahl in einem drei-dimensionalen System nur groß genug, so dass der Kontinuumlimes gerechtfertigt ist, habe fast alle Teilchen die maximale (kinetische) Energie!

(d) Bestätigen Sie die wichtige Beziehung zwischen Fermi-Energie und Teilchendichte,

$$\varepsilon_{\mathrm{F}} = (3\pi^2)^{2/3}\frac{\hbar^2}{2m}n^{2/3}\,. \tag{9}$$

und eine ebenso wichtige Beziehung zwischen der räumlichen Dichte der Energie im Grundzustand – die ja reine kinetische Energie ist – und der Teilchendichte,

$$\text{Dichte der kinetischen Energie} \equiv E_0/V = \kappa n^{5/3}\,, \qquad \kappa = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{3^{5/3}\pi^{4/3}}{5} \tag{10}$$

entsprechend einem Druck

$$P_0 \equiv -\left(\frac{\partial E_0}{\partial V}\right)_N = \frac{2}{3}\frac{E_0}{V}\,. \tag{11}$$

In der Festkörperhysik ist das ideale Fermigas ein beliebter Ausgangspunkt für die Physik der Elektronen in Metallen oder Halbleitern. Die fundamentale Längenskala ist hier der Bohr'sche Radius, die fundamentale Energieskala das Rydberg. Eine Material-spezifische Längenskala vermittelt das Kugelvolumen, das jedem Leitungselektron zukommt,

$$\frac{V}{N} \equiv \frac{1}{\varrho} =: \frac{4\pi}{3}r_s^3\,, \quad r_s = \left(\frac{3}{4\pi\varrho}\right)^{1/3} \tag{12}$$

Typische Werte von r_s/a_0 sind 2 bis 6.

(d) Bestätigen Sie

$$k_F = \frac{3.63}{r_s/a_0}\mathrm{A}\,, \qquad v_F = \frac{4.20}{r_s/a_0}\times 10^6\mathrm{m/sec}\,, \qquad \varepsilon_F = \frac{50.1}{(r_s/a_0)^2}\mathrm{eV}\,. \tag{13}$$

Mit typischen Geschwindigkeiten entsprechend einem Prozent der Lichtgeschwindigkeit sind Elektronen dank Pauli-Verbot in Metallen zwar ziemlich schnell![1], dürfen aber getrost nicht-relativistisch behandelt werden.

▷ **Aufgabe 4 (Yukawa-Streuung)*** (6 Punkte)

Illustrativ das Beispiel der Streuung am Yukawapotential

$$V(r) = V_0\frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \tag{14}$$

für die wir Sie bitten, die Streuampltitude, den differentiellen und den totalen Streuquerschnitt in der ersten Born'schen Näherung zu berechnen. Diskutieren Sie bitte auch den Grenzfall $\mu, V_0 \to 0$ mit $V_0/\mu = ZZ'e^2/(4\pi\epsilon_0)$ fest, in dem das Yukawapotential die Form des Coulomb- bzw. Gravitationspotentials annimmt.

[1] Und üben angesichts $P \sim 10^8$Atm einen ziemlichen Druck aus. Kompensiert wir dieser Fermidruck in Metallen durch die Coulombwechselwirkungen der beteiligten Ladungsträfger – das sind die Ionenrümpfe und die Elektronen – die hier allerdings unberücksichtigt bleiben.

▷ **Aufgabe 5 (Prisoners' Dilemma)** (0 Punkte)

[Für Ihre Sozialkompetenz . . .]

Take a friend, go to the bar, but don't order drinks immediately. Instead you agree on the following. Whoever orders a drink, must pay for the drink, but the other will enjoy the drink. Enjoying a drink, while the other has nothing gives maximal satisfaction 5 points (yes – it is a nasty game). Suffering without a drink while the other is enjoying his drink gives minimal satisfaction 0 points. Enjoying a drink in company gives 3 points, while joint suffering of both without drink gives 1 point ("at least I am not alone").

Evidently, this is a two-player binary choice game (for each round the choice is "I order a drink" vs "I do not order a drink"), yet in contrast to ordinary board games (or the like), it is "non-zero sum" (contemplate on the outcome "nobody ever orders any drink" vs " both order a drink"). Surprisingly, this game has a solution which is easily found by rational reasoning (assuming that both you and your frind strive for maximal satisfaction). Unfortunately, however, this solution is rather frustrating which is why the game poses a dilemma . . .

Background: The game runs under the title "Prisoners Dilemma" because, when it was invented in the 1950's, the story which comes with the game plays in the American System of Justice where deals between the various parties (prisoner, lawyer, attorney, judge) are quite common. The PD made some headlines in the eighties when Sociology tried to understand, how in a society of egoist, mutual cooperation (where, in the end, both enjoy their drink) can emerge. It was discovered, that the PD is the paradigm for the interaction between individuals, and the big question was, how the player could escape the Dilemma. In a computer tournament, led by Robert Axelrodt, it turned out that in an iterated PD (where the players play PD several times without knowing in advance, however, how often they will play), so called "Tit-for-Tat" is the most promising strategy: order the drink in the first move, and from then on do whatever your friend did in the previous move. Meanwhile, the games was quantized, see Quantum Games and Quantum Strategies by J. Eisert, M. Wilkens, and M. Lewenstein, Phys. Rev. Lett. **83**, 3077 (1999).