Theoretische Physik
- Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie (SoSe 2015) -

Übungsblatt 04

Emission 10.04.15 – Digestion XY.0Z.15

▷ Aufgabe 1

Ein Fahrgast in einem Karussell erfährt bekanntlich eine Zentripetalbeschleunigung, die umso größer ist, je weiter er von der Karussellachse Platz genommen hat. Aus Sicht des Fahrgastes ist diese Zentripetalbeschleunigung nicht von einer Gravitationsbeschleunigung zu unterscheiden, die ihn nach innen drückt (ein mitgeführter Apfel und eine Feder erfahren die gleiche Beschleunigung).

Seien x, y, z die kartesischen Koordinaten eines Ereignisses im Laborsystem L, entsprechend x', y', z' die kartesischen Koordinaten in einem mit dem Karussell mitrotierenden Bezugssystem. Für ein Karussell, das mit der Winkelfrequenz Ω (gemessen im Laborsystem – im mitrotierenden Bezugssystem rotiert das Karussell natürlich nicht) um die z-Achse rotiert

$$x' = \cos(\Omega t)x + \sin(\Omega t)y\,, \tag{1}$$
$$y' = \cos(\Omega t)y - \sin(\Omega t)x\,. \tag{2}$$
$$z' = z\,. \tag{3}$$

(a) Mit $ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ das Linienelement im Laborsystem, welche Form hat das Linienelement im Karussellsystem?

(b) Im Karusselsystem ist das Linienelement nicht zeit-orthogonal, d.h. es treten Terme auf, die das Zeitinkrement dt an die Koordinatendifferentiale dx und dy koppeln. Konstruieren Sie eine Transformation $dt \mapsto dt' = dt + \alpha(x', y')dx' + \beta(x', y')dy'$, so dass das Linienelement zeit-orthogonal, also $ds^2 = c^2 g_{0'0'}dt'^2 + g_{x'x'}dx'^2 + g_{x'y'}dx'dy' + g_{x'y'}dy'dx' + g_{y'y'}dy'^2 + g_{z'z'}dz'^2$. Bestimmen Sie die Funktionen $g_{\mu'\nu'}(x', y', z', t')$, und drücken sie deren t', x', y', z'-Abhängigkeit durch das Potential der Zentrifugalbeschleunigung aus.

(c) Transformieren Sie das Linienelement auf Zylinderkoordinaten $x' = \rho' \cos(\varphi')$, $y' = \rho' \sin(\varphi')$ (z' unverändert). Bestimmen Sie das Verhältnis von Umfang zu Radius eines mit der Roationsachse konzentrischen Kreises in der xy-Ebene (i) im Laborsystem, (ii) im Karussellsystem.

(d) Warum dürfen Sie hier vermuten, dass der Aufenthalt in Gravitationsfelder ein Jungrunnen und obendrein dem Selbstwertgefühl zuträglich?

▷ Aufgabe 2

Gemäß derzeitig favorisiertem Standardmodell der Kosmologie ist das Universum auf hinreichend großen Skalen räumlich homogen, isotrop und flach und dehnt sich im Laufe der Zeit aus. Seine metrischen Eigenschaften werden durch ein Linienelement[1]

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a(t)^2\left[dx^2 + dy^2 + dz^2\right] \tag{15}$$

[1] sog. *flache Robertson-Walker Metrik*

beschrieben, wo t die Bedeutung einer Weltzeit, und x^i mitbewegte Koordinaten, womit gemeint ist, dass die Weltlinien von Galaxien durch zeitlich konstante x^i beschrieben werden.

Die Zeitabhängigkeit des Skalenfaktors $a(t)$ wird durch die Einsteingleichungen bestimmt. Je nach Modell des Energie-Impulstentors (Staub, Strahlung etc) erhält man

$$a(t) = (t/t_0)^q \,, \qquad 0 < q < 1 \,. \tag{16}$$

mit $q = \frac{2}{3}$ für ein Materie-dominiertes Universum oder $q = \frac{1}{2}$ für ein Strahlungs-dominiertes Universum. Der Parameter t_0 kennzeichnet einen willkürlich gewählten Zeitpunkt (Kosmologen sprechen von "Epoche"), in der die Koordinatenentfernung der metrischen Entfernung gleicht. Meist wählt man "t_0 =heutzutage".[2]. Und da die Metrik im Limes $t \to 0$ singulär (alle metrischen Entfernungen schrumpfen auf Null), ist der Defintionsbereich der Zeitkoordinate

$$0 < t < \infty \,, \tag{17}$$

d.h. die Raumzeit endet bei $t = 0$. Die Frage "was davor geschah" ist sinnlos, da es ein "davor" schlicht nicht gibt.

(a) Zur Erinnerung: Die Lichtkegel einer Geometrie (hier Gl. (15)) werden durch Nullgeodäten erzeugt, also Kurven $x^i(t)$ mit $ds^2 = 0$. Bestimmen Sie die Nullgeodäten in X-Richtung durch den Weltpunkt (ct_0, x_0, y_0, z_0) (interpretiert "Jetzt und Hier"). Gegeben $t_0 \approx 13,8$GLj (Stand: 2014) – wie groß ist das Universum heute? Und was bedeutet das eigentlich?

(b) Eine Galaxis, die sich heute in einer Entfernung d befindet, emittiert immer Licht der Frequenz ν. Mit welcher Frequenz wird dieses Lichte heute und hier wahrgenommen? (Stichwort: kosmologische Rotverschiebung). Wie also läßt sich die heutige Entfernung aus der Rotverschiebung ableiten?

[2] Diese Wahl ist äquivalent zu "t_0 =Alter des Universums".