Mathematische Bissen
- Gruppentheorie für PhysikerInnen -

Übungsblatt 1 ($40 + 2\pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 20.04.15 – Abgabe 06.05.15 – Besprechung 08.05.15

▷ Aufgabe 1 (Ja oder Nein) (1 Punkt)

Es sei $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen incl 0; jemand behauptet $(\mathbb{N}_0, +, 0)$ bilde eine Gruppe. Sie

- ☐ stimmen zu
- ☐ stimmen nicht zu

▷ Aufgabe 2 (Dimension von Matrixgruppe I) (1 Punkt)

Die Dimension der generell linearen Gruppe $GL(n, \mathbb{C})$ ist

- ☐ n, schließlich sind das n-dimensionale Matrizen
- ☐ n^2, schließlich haben die n^2 Elemente
- ☐ $2n^2$, schließlich gibt es Real- und Imaginärteil

▷ Aufgabe 3 (Dimension von Matrixgruppen II) (2 Punkte)

Zeigen Sie: Die Dimension der $SO(n)$ ist $r = n(n-1)/2$, die Dimension der $SU(n)$ ist $r = n(n+1)/2$.

▷ Aufgabe 4 (Gruppen der Ordnung 3) (2 Punkte)

Zeigen Sie: Es gibt genau eine abstrakte Gruppe der Ordnung 3, und die ist isomorph C_3. Geben Sie ein Handvoll Realisierungen an.

▷ Aufgabe 5 (Gruppen der Ordnung 4) (4 Punkte)

Zeigen Sie: Es gibt genau zwei abstrakte Gruppe der Ordnung 4, eine isomorph C_4, die andere isomorph $V_4 \cong C_2 \otimes C_2$, sog *Klein'sche Vierergruppe*.

▷ Aufgabe 6 (Gruppen der Ordnung n) (4 Punkte)

Zeigen Sie: Jede Gruppe G, deren Ordnung n eine Primzahl ist, ist isomorph zur zyklischen Gruppe C_n, $G \cong C_n$.

▷ Aufgabe 7 (Äquivalenzrelation Konjugation) (6 Punkte)

Zwei Elemente a und b einer Gruppe G heißen *konjugiert*, falls ein Gruppenelement g exisitert, genannt das konjugierende Element, so dass $a = gbg^{-1}$. Zeigen Sie:

(a) Die Beziehung "a ist zu b konjugiert" ist eine Äquivalenzrelation, $a \sim b \Leftrightarrow \exists g \in G : a = gbg^{-1}$.[2]

---

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

[2] Zur Erinnerung: eine Äquivalenzrelation ist (i) reflexiv, $a \sim a$, (ii) symmetrisch, $a \sim b \Rightarrow b \sim a$, (iii) transitiv, $a \sim b \text{und} b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

(b) Zwei $SO(3)$-Drehungen sind genau dann konjugiert, wenn sie denselben Drehwinkel haben.

Nun induziert eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge M immer auch eine Partition – man sagt auch Zerlegung – in disjunkte Äquivalenzklassen, $\ddot{A}_a = \{b \in M | b \sim a\}$. Die Konjugation liefert demnach eine Zerlegung der Gruppe in disjunkte Klassen, sog *Konjugationsklassen* $[a] := \{b | b = gag^{-1}, g \in G\}$. Zeigen Sie:

(c) Die Konjugationsklassen der $SO(3)$ sind Drehwinkel.

Diese Einsicht wird sich übrigens bei der Diskussion der Drehungen in Euler-Parametrisierung als nützlich erweisen.

▷ **Aufgabe 8 (Permutationen)** (10 + π Punkte)

Die Gruppe der Bijektionen eines Anfangsstücks $\{1, 2, 3, \ldots, N\}$ der natürlichen Zahlen auf sich selbst nennt man die *symmetrische Gruppe* S_N; ihre Elemente heißen *Permutationen*. Die S_N operiert in natürlicher Weise auf den Zahlen $1 \ldots, N$, oder auch auf jeder beliebigen Menge von N Dingen, die man von 1 bis N numeriert hat.

Unter einem *k-Zykel* versteht man eine Permutation $\sigma \in S_N$, die k Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \{1, 2, \ldots, N\}$ zyklisch vertauscht,

$$\sigma(n_1) = n_2\,, \quad \sigma(n_2) = n_3\,, \quad \ldots, \sigma(n_k) = n_1\,, \tag{1}$$

und alle anderen Zahlen unverändert lässt.

(a) Zeigen Sie: jede Permutation $\sigma \in S_N$ kann man in eindeutiger Weise (bis auf Reihenfolge) in ein Produkt disjunkter Zykel zerlegen.

Für eine Permutation σ definiert man als eine Art Fingerabdruck den *Zykeltyp* (σ), der die Längen und Anzahlen der Zykel angibt, in die σ zerlegt werden kann; Beispiel: Die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 6 & 1 & 3 & 5 & 2 & 9 & 4 & 7 \end{pmatrix} \tag{2}$$

zerfällt in die Zykel

$$\sigma = (1843)\,(26)\,(79)\,(5) \tag{3}$$

und hat den Zykeltyp

$$(\sigma) = (4)^1\,(2)^2\,(1)^1\,, \tag{4}$$

also: σ besteht aus einem 4-Zykel, zwei 2-Zykeln und einem 1-Zykel.

(a) Zeigen Sie: die Zykelklassen (= Permutationen gleichen Zykeltyps) sind gerade die Konjugationsklassen von S_N.

(b) Ein gutes Beispiel für eine Realisierung der Gruppenoperation "Konjugation" in Hardware ist die im zweiten Weltkrieg benutzte Chiffriermaschine *Enigma*: Diese Maschine permutiert die 26 Buchstaben von A bis Z; abhängig von einem geheimen

Schlüssel kann eine sehr große Anzahl verschiedener Permutationen realisiert werden, und ein Walzenmechanismus sorgt dafür, dass für jedes Zeichen einer Nachricht eine andere Permutation benutzt wird.

Dieser Walzenmechanismus hat eine Besonderheit: er wird zweimal durchlaufen, was vom Konstrukteur als tolles Feature gepriesen wurde — ein Auszug aus der Patentschrift: *"Durch diesen Rückgang des Stromes durch den Chiffrierwalzensatz findet eine weitere Verwürfelung statt. Infolge dieser Anordnung ist es möglich, mit verhältnismäßig wenig Chiffrierwalzen auszukommen und trotzdem eine große Chiffriersicherheit aufrechtzuerhalten."*

Tatsächlich aber ist diese vermeintlich geniale Konstruktion ein Kardinalfehler der Enigma und hatte weitreichende Konsequenzen; eine mathematische Konsequenz ist: alle durch Enigma realisierbaren Permutationen liegen in derselben Konjugationsklasse von S_{26}, haben also denselben Zykeltyp, und noch dazu einen sehr simplen. Welchen?

▷ **Aufgabe 9 (Raumgruppen)** (10 Punkte)

Interessante Gruppen der Physik entstehen oft als Untergruppen einer größeren Gruppe durch eine Zusatzbedingung; sehr ergiebig ist dieses Verfahren bei der Untersuchung der Symmetrien von Kristallen, die man durch ihre jeweilige *Raumgruppe* beschreibt. Mutter aller Raumgruppen ist die Euklidische Gruppe

$$\mathcal{E}(V) = \{(R|\vec{t}) \text{ wobei } R \in O(V) \text{ und } \vec{t} \in V\}\,. \tag{5}$$

wo $V \simeq \mathbb{R}^3$ Euklidischer Vektorraum.[3] Das Bild eines Koordinatenvektors $\vec{x}$ unter einer Euklidischen Bewegung $(R|\vec{t}) \in \mathcal{E}$ ist $\vec{x}' = R\vec{x} + \vec{t}$, wo R eine Rotation und $\vec{t}$ eine Translation beschreiben.

Die Zerlegung Euklidischer Bewegungen in Translation und Rotation legt es nahe, zwei Untergruppen zu definieren: $\mathcal{T}(V) := \{(\mathrm{id}_V|\vec{t}) \text{ wobei } \vec{t} \in V\}$ heißt *Translationsgruppe* und $\mathcal{P}(V) := \{(R|o) \text{ wobei } R \in O(3)\}$ heißt *Punktgruppe* des Raumes. Die Euklidische Gruppe schränken wir nun ein auf diejenigen Bewegungen, die einen bestimmten starren Körper invariant lassen, genauer:

Wir betrachten einen Festkörper Γ aus N verschiedenen Atomsorten. Den können wir beschreiben als Tupel $\Gamma = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N)$ von Punktmengen, wobei Γ_j genau die Orte der Atome der Sorte j enthält. Als *Raumgruppe* $\mathcal{E}(\Gamma)$ dieses Festkörpers bezeichnet man diejenigen Bewegungen des Festkörpers, die alle Punktmengen auf sich selbst abbilden (also: jedes blaue Atom auf ein blaues Atom, jedes rote Atom auf ein rotes Atom, ...):

$$\mathcal{E}(\Gamma) := \{g \in \mathcal{E}(V) \text{ wobei } g(\Gamma_1) = \Gamma_1, \ldots, g(\Gamma_N) = \Gamma_N\} \tag{6}$$

Wichtige Untergruppen von $\mathcal{E}(\Gamma)$ sind wieder die Punktgruppe

$$\mathcal{P}(\Gamma) := \mathcal{P}(V) \cap \mathcal{E}(\Gamma) \tag{7}$$

und die Translationsgruppe

$$\mathcal{T}(\Gamma) := \mathcal{T}(V) \cap \mathcal{E}(\Gamma)\,. \tag{8}$$

[3] Vektoren eines dreidimensionalen Euklidischen Vektorraums der als "Vektorraum der Verschiebungen in einem dreidimensionalen Euklidischen Raum" fungiert adeln wir mit einem Pfeil auf dem Kopf.

(a) Zeigen Sie: $\mathcal{T}(\Gamma)$ ist Normalteiler von $\mathcal{E}(\Gamma)$.

(b) Gilt stets $\mathcal{E}(\Gamma)/\mathcal{T}(\Gamma) \cong \mathcal{P}(\Gamma)$?

(c) $\Gamma = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N)$ heißt *Kristall*, wenn es drei linear unabhängige Vektoren $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3 \in V$ gibt, so dass $(\mathrm{id}_V|\vec{t}_k) \in \mathcal{E}(\Gamma)$ für $k = 1, 2, 3$.

Zeigen Sie: es gibt drei (nicht eindeutig bestimmte) Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in V$, so dass

$$\mathcal{T}(\Gamma) = \{(\mathrm{id}_V|\vec{a}_j n^j) \text{ wobei } n^1, n^2, n^3 \in \mathbb{Z}\}\,. \tag{9}$$

(Die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ heißen *primitive Gittervektoren* des Kristalls. Der Orbit $\mathcal{T}(\Gamma)(0)$ des Ursprungs unter der Translationsgruppe $\mathcal{T}(\Gamma)$ heißt auch das *Bravais-Gitter* des Kristalls.)

▷ Aufgabe 10 (Rubik's Cube) (π Punkte)

Rubik's Zauberwürfel ist Ihnen vielleicht schon mal untergekommen (falls nicht: Wikipedia oder YouTube hilft weiter ...). Hier nun ein kurzes Zitat[4]

> Ideal Toy Company stated on the package of the original Rubik cube that there were more than three billion[5] possible states the cube could attain. It's analogous to Mac Donald's proudly announcing that they've sold more than 120 hamburgers. (J. A. Paulos, Innumeracy)

verbunden mit der Bitte, einmal die Anzahl der möglichen Zustände des Würfels (bei fester Lage des unsichtbaren Zentralwürfelchens) abzuschätzen.

[4] gefunden auf `http://www.gap-system.org/Gap3/Doc3/Examples3/rubik.html`

[5] Das Englische “Billion” ist die Deutsche Milliarde ...