

Gruppentheorie für Quantenmechaniker
Universität Potsdam, Sommersemester 2015
Übungsblatt 2 — Besprechung: Freitag, 29.05.2015

1 Drehgruppe

In der Vorlesung wurden die kanonischen Generatoren der Drehgruppe $O(3)$ bestimmt:

$$G_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

- (1) Berechnen Sie explizit die Matrix

$$R = \exp(\varphi G_x), \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad (1.1.1)$$

und überzeugen Sie sich, dass R die Matrix einer Drehung um die x -Achse mit Drehwinkel φ ist.

- (2) Zeigen Sie: $[G_j, G_k] = \varepsilon_{jkn} G_n$. (1.2.1)

Bemerkung: diese Beziehung ist die definierende Eigenschaft aller Drehimpulse; Generatoren mit dieser Eigenschaft sind Basis einer sogenannten *Drehimpulsalgebra*.

2 Lorentzgruppe

Die $SO(1,3)$, auch als *Lorentzgruppe* bekannt, ist die Gruppe der linearen Transformationen, die den metrischen Tensor der Minkowski-Metrik invariant lässt — für alle $\Lambda \in SO(1,3)$ gilt:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \quad \text{mit } \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

- (1) Finden Sie einen möglichst einfach gewählten vollständigen Satz von Generatoren dieser Gruppe. Überzeugen Sie sich, dass es 6 linear unabhängige Generatoren gibt, von denen 3 so gewählt werden können, dass sie den Generatoren der $O(3)$ entsprechen und folglich rein räumliche Drehungen generieren.
- (2) Zeigen Sie, dass es neben den 3 Generatoren räumlicher Drehungen 3 weitere Generatoren gibt, die *Lorentz-Boosts* generieren. Berechnen Sie dazu

$$\Lambda = \exp(\beta B), \quad (2.2.1)$$

mit einem reellen Parameter β und einem beliebigen Boost-Generator B , und zeigen Sie, dass das Ergebnis die Matrix einer Lorentz-Transformation in ein mit Relativgeschwindigkeit $v \propto \tanh(\beta)$ bewegtes Bezugssystem ist.

