Übung 3 – Cooperpaare & Majorana-Fermionen

Aufgabe 1:

Abschätzung der räumlichen Ausdehnung eines Cooper-Paares ausgehend von der vom Leitungselektron ausgelösten Gitterschwingung des Supraleiters und der Fermi-Geschwindigkeit der Leitungselektronen:

Die Deformation des Ionengitters erfolgt auf einer Zeitskala, die durch die Debye-Frequenz der Phononen festgelegt wird.

a) In welcher Größenordnung bewegt sich die Debye-Frequenz ω_D und die Phasendauer τ einer Gitterschwingung (Phonon)?
b) Während der Phasendauer einer Gitterschwingung legt das Elektron einen Weg zurück, der sich aus der Fermi-Geschwindigkeit v_F der Leitungselektronen ergibt. In welcher Größenordnung bewegt sich die Fermi-Geschwindigkeit?
In welcher Größenordnung bewegt sich der vom Elektron während der Phasendauer τ zurückgelegte Weg als Maß für die räumliche Ausdehnung des Cooper-Paares?

Aufgabe 2:

Abschätzung der räumlichen Ausdehnung eines Cooper-Paares ausgehend von der kritischen Temperatur T_C als Parameter eines Supraleiters:

Supraleitung tritt erst unterhalb der für das Material spezifischen Sprungtemperatur T_C auf ($0<T_C<100K$). Offensichtlich wird Supraleitung durch thermische Energie in der Größenordnung k_BT_C zerstört, nachdem das Cooper-Paar eine entsprechende Impulsänderung Δp erfahren hat. Nach der Heisenbergschen Unschärferelation ist das Produkt aus der Impulsänderung Δp und der Ortsunschärfe Δx des Cooper-Paars in der Größenordnung des Planckschen Wirkungsquantums h.

a) Welche Impulsänderung Δp erfährt ein Cooper-Paar durch die thermische Energie k_BT_C bei einer Sprungtemperatur T_C=100 K?
b) In welcher Größenordnung bewegt sich bei Sprungtemperaturen in der Größenordnung von 100 K die Ortsunschärfe des Cooper-Paares als Maß für dessen räumliche Ausdehnung?

Aufgabe 3:

Abschätzungen der Lebensdauer eines Cooper-Paares:

a) In welcher Größenordnung bewegt sich die Lebensdauer τ_{CP} eines Cooper-Paares , wenn die Phasendauer der Gitterschwingung als Maß für die Lebensdauer dient?

Aus der Heisenbergschen Unschärferelation ergibt sich, dass das Produkt aus Energieänderung ΔE und deren Einwirkungszeit Δt ebenfalls in der Größenordnung des Planckschen Wirkungsquantums h ist.

In welcher Größenordnung bewegt sich die Lebensdauer τ_{CP} eines Cooper-Paares , wenn Δt als Maß für die Lebensdauer dient, wobei die Energieänderung von der

b) thermischen Energie $k_B T_C$ kommt?

c) Phononenenergie $\hbar\omega_D$ kommt?

Aufgabe 4:

Die **Dirac-Gleichung** beschreibt in der relativistischen Quantenmechanik die Eigenschaften und das Verhalten eines Fermions.

Die Dirac-Gleichung ist ein System von vier gekoppelten partiellen Differentialgleichungen für die vier Komponentenfunktionen des Dirac-Spinors $\psi(x)$. Die Variable x steht hier für $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, worin der obere Index 0 die Zeit $t = x^0$ und die Indizes 1 bis 3 die Ortskoordinaten (x^1, x^2, x^3) bezeichnen.

In natürlichen Maßeinheiten mit c = 1 = ħ lautet die Dirac-Gleichung für ein ungeladenes Teilchen der Masse m:

$$\left[\mathrm{i} \sum_{\mu=0}^{3} \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right] \psi(x) = 0 \, .$$

Die vier γ-Matrizen γ^μ (μ=0,1,2,3) lauten in der Majorana-Darstellung mit den 3 Pauli-Matrizen σ^i (i=1,2,3):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix}, \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ und } \gamma^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix}.$$

a) Angenommen ψ(x) sei eine Lösung der Dirac-Gleichung mit γ-Matrizen in der Majorana-Darstellung.
Zeigen Sie: Auch die zu ψ konjugiert komplexe Wellenfunktion ψ* ist eine Lösung dieser Dirac-Gleichung.

b) Zeigen Sie, dass in der Majorana-Darstellung eine komplexe Lösung ψ der Dirac-Gleichung in eine reelle und eine rein imaginäre Komponente zerlegt werden kann, die beide Lösungen der Dirac-Gleichung sind.