Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2015) -

Übungsblatt 02 ($20 + \pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 23.04.15 – Abgabe 04.05.15 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1 (Darstellungswechsel)* (6 Punkte)

Ein Teilchen, das sich in einer Raumdimension bewegt, sei in einem Zustand präpariert der sich in der Impulsdarstellung liest

$$\tilde{\psi}(k) = \begin{cases} c & a \leq k \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

(a) Wie muss c gewählt werden, damit $\tilde{\psi}$ korrekt normiert? Berechnen Sie Mittelwert und Streuung der Messgröße Impuls.

(b) Bestimmen Sie die Wellenfunktion in der Ortsdarstellung. Machen Sie sich ein Bild der entsprechenden Wahrscheinlichkeitsdichte! Berechnen Sie Mittelwert und Streuung der Messgröße Ort. Welcher Unschärferelation genügt das Produkt aus Orts- und Impulsstreuung?

▷ Aufgabe 2 (Teilchen in der Kiste)* (8 Punkte)

Ein Teilchen sei in einer würfelförmigen Kiste der Kantenlänge L frei beweglich eingeschlossen.

(a) Bestimmen Sie die Energieniveaus und Eigenfunktionen. Zeigen Sie, daß die Energie-Eigenwerte (Energieniveaus) durch die Gleichung

$$E_{klm} = \epsilon \left((l+1)^2 + (m+1)^2 + (n+1)^2\right) , \qquad l, m, n = 0, 1, 2, \dots , \tag{2}$$

mit $\epsilon = \hbar^2\pi^2/(2mL^2)$ gegeben sind, und die dazugehörigen Energie-Eigenfunktionen

$$\varphi_{klm}(x, y, z) = \left[\frac{2}{L}\right]^{\frac{3}{2}} \sin(k_l x)\sin(k_m y)\sin(k_n z) , \qquad k_l = \frac{(l+1)\pi}{L} \text{ etc} , \tag{3}$$

wobei die Kiste mit der unteren Ecke links vorne im Koordinatenursprung plaziert.

(b) Welchen Druck übt das Teilchen im Grundzustand auf die Wände aus?
<u>Zur Erinnerung:</u> "Druck" ist "Kraft pro Fläche". "Kraft" ist "Arbeit pro Wegstrecke", und "Arbeit" ist sowas wie Energie. Bestimmen Sie also zunächst die Änderung der Grundzustandsenergie bei infinitesimaler Verschiebung einer der Wände.

[1]Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

(c) Wie groß dürfte $\hbar$ allenfalls sein, um beim Öffnen handelsüblicher Melonen durch umherfliegende Melonenkerne nicht in Lebensgefahr zu geraten? Als theoretische Physikerin dürfen Sie annehmen, dass handelsübliche Melonen würfelförmig sind – was sie ja auch sind, vgl. Abbildung.

(d) Überzeugen Sie sich davon, dass (i) die Energie-Niveaus um so dichter beieinander liegen, je größer die Kiste ist, und (ii) je höher die Energie, desto mehr Niveaus befinden sich in ihrer Nachbarschaft. Man sagt, im Grenzfall $L \to \infty$ entstehe ein quasi-kontinuierliches Energiespektrum. Bestimmen Sie für diesen Fall die Zustandsdichte, d.h. die Zahl der Niveaus, deren Energie im Energie-Intervall dE um E liegt.

▷ Aufgabe 3 (Feynman-Propagator) (6 Punkte)

Für einen freien Massepunkt in einer Raumdimension lautet die Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t)\,. \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass sich die allgemeine Lösung dieser Gleichung darstellen lässt

$$\Psi(x,t) = \int U(x,t;x',t')\Psi(x',t')dx'\,, \tag{5}$$

worin $\Psi(\cdot,t')$ eine für den Zeitpunkt t' spezifizierte Anfangsbedingung, und der Integralkern U gegeben ist

$$U(x,t;x',t') = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t-t')}}\exp\left\{\frac{im(x-x')^2}{2\hbar(t-t')}\right\}\,. \tag{6}$$

Bemerkung: Der Integralkern heißt in der allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen auch *Green'sche Funktion*. Für den sepziellen Fall der (freien) Schrödingergleichung läuft U auch unter der Bezeichnung *Feynman-Propagator*.

▷ Aufgabe 4 (Quantendiffusion) (π Punkte)

Ihr Freund ist besorgt. Er schläft in einem Hochbett und befürchtet, aufgrund der Quantendiffusion seines Wellenpaketes morgens auf dem Boden aufzuwachen (möglicherweise, so seine konkrete Befürchtung, mit blauen Flecken).

(a) Versuchen Sie, Ihren Freund zu beruhigen.
Hinweis: Modellieren Sie Ihren Freund als Gauss'sches Wellenpaket. Benuzen Sie die Relation $m\Delta v^2/2 \sim k_\mathrm{B}T$, die Sie in der statistischen Mechanik kennenlernen werden, um die anfängliche Geschwindigkeits-Unschärfe Ihres Freundes der Masse m mit seiner Körpertemperatur T in Beziehung zu setzen (k_B ist die Boltzmann-Konstante).

(b) Wie lange müsste Ihr Freund gewohnheitsmäßig schlafen, um im Mittel jedes zweite mal neben seinem Bett aufzuwachen?

(c) Geben Sie eine Einschätzung ob die unter (b) gefundene Antwort realistisch erscheint. Begründen Sie Ihre Einschätzung. Sollten Sie zum Schluss kommen "unrealistisch" – woran könnte das liegen, also: an welcher Stelle ist das Modell inadäquat?