Theoretische Physik III
– Quantenmechanik (SoSe 2015) –

Übungsblatt 5 (20 Punkte)

Ausgabe: 18.05.15 – Abgabe: 26.05.15 – Besprechung: n.V.

▷ **Aufgabe 5.1** – Kohärente Zustände des harmonischen Oszillators (20 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie die Eigenzustände von $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ kennen gelernt, sog. *Fockzustände* $|n\rangle$, wobei $\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle$. Fockzustände, daran darf ich Sie erinnern, sind die stationären Zustände des harmonischen Oszillators.

Bei den stationären Zuständen bewegt sich bekanntlich nichts. Nun hat man beim harmonischen Oszillator aber immer ein schwingendes Teilchen vor Augen. Um dieses Bild auch in der Quantenmechanik wieder zu finden, muss die zeitliche Entwicklung linearer Überlagerungen von Fockzuständen studiert werden. Und eine besonders wichtige Klasse von solchen linearen Überlagerungen sind die sog. *kohärenten Zustände*,

$$|\alpha\rangle := \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle\,, \tag{1}$$

worin $\alpha \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Zeigen Sie

(a) Ein kohärenter Zustand $|\alpha\rangle$ ist Eigenvektor des Vernichtungsoperators zum Eigenwert α,

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle\,. \tag{2}$$

(a') Die kohärenten Zustände sind nicht orthogonal:

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = \mathrm{e}^{-|\alpha-\beta|^2}\,, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}\,. \tag{3}$$

Dies war nicht anders zu erwarten, ist doch $\hat{a}$ kein hermitescher Operator.

Im Folgenden verwenden wir geeignete Einheiten für Ort $\hat{q}$ und Impuls $\hat{p}$, so dass $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q} + \mathrm{i}\hat{p})$ mit $[\hat{q}\,, \hat{p}] = \mathrm{i}$. Zeigen Sie:

(b) Erwartungswerte von Ort und Impuls im kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$ lauten

$$\langle\hat{q}\rangle_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \alpha^*) \tag{4}$$

$$\langle\hat{p}\rangle_\alpha = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(\alpha^* - \alpha) \tag{5}$$

(c) $|\alpha\rangle$ ist Zustand minimaler Unschärfe, $\Delta_\alpha q\,\Delta_\alpha p = 1/2$.

(d) Die Ortsdarstellung von $|\alpha\rangle$, $\psi_\alpha(x) := \langle x|\alpha\rangle$ ist eine um $\langle\hat{q}\rangle$ zentrierte Gaussfunktion mit der Breite $1/\sqrt{2}$ und einem Phasenfaktor $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle\hat{p}\rangle x}$.

Hinweis: Besinnen Sie sich auf die Vorlesung und wie da die Ortsdarstellung des Grundzustands gewonnen wurde.

(e) Studieren Sie nun die Dynamik des kohärenten Zustands eines harmonischen Oszillator. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Oszillator in einem kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$. Zeigen Sie, dass der Oszillator dann auch zu irgendeinem späteren Zeitpunkt in einem kohärenten Zustand ist. Bestimmen Sie die Amplitude $\alpha(t)$. Machen Sie sich ein Bild von $\alpha(t)$ (komplexe Ebene benutzen!) und $|\langle x|\alpha(t)\rangle|$. Genießen Sie die augenfällige Übereinstimmung mit dem Bild vom schwingenden Teilchen. Machen Sie sich klar, dass die komplexe Ebene im engen Zusammenhang mit dem klassischen Phasenraum steht.

Im Kontext der Elektrodynamik/Quantenoptik heißen Ort und Impuls "Quadraturamplituden"; "Ort" entspricht dabei der elektrischen Feldstärke, "Impuls" ihrer zeitlichen Ableitung. Der Operator $\hat{n} := \hat{a}^\dagger\hat{a}$ heißt Photonenzahloperator. Zeigen Sie:

(f) Im kohärenten Zustand ist die Photonenzahl Poisson-verteilt,

$$P(n) := |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\,; \tag{6}$$

(g) Erwartungswert und Quadratvarianz der Photonenzahl im kohärenten Zustand sind

$$\langle\hat{n}\rangle_\alpha = |\alpha|^2\,, \tag{7}$$
$$\Delta^2_\alpha n = |\alpha|^2\,. \tag{8}$$