Theoretische Physik III
– Quantenmechanik (SoSe 2015) –

Übungsblatt 6 (20 Punkte)

Ausgabe: 26.05.15 – Abgabe: 01.06.15 – Besprechung: n.V.

▷ **Aufgabe 6.1** – Dimensionale Analysis (5 Punkte)

In der Vorlesung (und in der Experimentalphysik) wird gerne benutzt, dass man diverse Konstanten in geeigneten ("natürliche") Einheiten loswerden kann. Mit dieser Technik kann man sich einen Überblick über einige Quanten-Probleme beschaffen, ohne die genaue Lösung zu kennen. (Für das Programmieren einer numerischen Lösung sind natürliche Einheiten ebenfalls unerlässlich.)

(a) Konstruieren Sie aus den Konstanten m, ω und $\hbar$ des quantisierten harmonischen Oszillator natürliche Skalen für Auslenkung, Impuls und Energie (die eckige Klammer um eine Größe gibt die natürliche Einheit an):

$$[x] = \sqrt{\frac{\hbar}{\omega m}}\,, \qquad [p] = \sqrt{\hbar \omega m}\,, \qquad [E] = \hbar\omega\,, \tag{1}$$

und zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator in der Ortsdarstellung die einfache Form annimmt

$$H = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(x + \frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\,. \tag{2}$$

(b) Ein diskretes Energiespektrum gibt es nicht für den Massepunkt im konstanten Kraftfeld

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + mg\hat{x}\,, \tag{3}$$

aber die natürlichen Einheiten für Länge und Energie sind (Beweis wie oben)

$$[x] = \sqrt[3]{\frac{\hbar^2}{gm^2}}\,, \qquad [E] = \sqrt[3]{\hbar^2 m g^2}\,. \tag{4}$$

Anwendung "Quantengravitation": wie groß sind diese Skalen für ein Neutron im Schwerefeld an der Erdoberfläche? (Stichwort "ultrakalte Neutronen")

▷ **Aufgabe 6.2** – Zwei-dimensionaler Oszillator und Drehimpuls-Algebra (15 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie die Leiter-Operatoren $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ für den ein-dimensionalen harmonischen Oszillator kennen gelernt. Bei einem Oszillator, der in zwei Richtungen schwingen kann, etwa in der xy-Ebene, können wir vier Leiter-Operatoren konstruieren: $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ wie gehabt aus dem Ortsoperator $\hat{x}$ und dem konjugierten Impuls $\hat{p}_x$, sowie

$$\hat{b} = \frac{\hat{y} + \mathrm{i}\hat{p}_y}{\sqrt{2}}\,, \qquad \hat{b}^\dagger = \frac{\hat{y} - \mathrm{i}\hat{p}_y}{\sqrt{2}} \tag{5}$$

aus den anderen beiden Observablen. Hierbei ist angenommen, dass der Oszillator in x- und y-Richtung dieselbe potentielle Energie hat, so dass in den verwendeten Einheiten $V(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{2}\hat{x}^2 + \frac{1}{2}\hat{y}^2$.

(a) Machen Sie sich klar, dass die Kommutationsbeziehungen dieser Operatoren $[\hat{b}\,, \hat{b}^\dagger] = \mathbb{1}$ und

$$[\hat{a}\,, \hat{b}] = [\hat{a}\,, \hat{b}^\dagger] = \ldots = 0 \tag{6}$$

lauten. Erstellen Sie eine Liste der Kommutatoren, die Sie aus den ersten beiden durch einfache Operationen gewinnen.

Mit Hilfe dieser vier Operatoren kann man nun interessante algebraische Strukturen erzeugen. Erinnern Sie sich an die Produktregel für Kommutatoren und die "Leiterbeziehungen" im eindimensionalen Oszillator, um zu zeigen:

(b) Der Hamiltonoperator des (isotropen) zweidimensionalen Oszillators ist (Hut ab!)

$$H = \hbar\omega N\,, \qquad N = a^\dagger a + b^\dagger b + \mathbb{1} \tag{7}$$

(c) Die drei hermiteschen Operatoren

$$J_1 = \frac{a^\dagger b + b^\dagger a}{2}\,, \qquad J_2 = \frac{a^\dagger b - b^\dagger a}{2\mathrm{i}}\,, \qquad J_3 = \frac{a^\dagger a - b^\dagger b}{2} \tag{8}$$

erfüllen die Kommutationsbeziehungen des Drehimpulses,

$$[J_1\,, J_2] = \mathrm{i}J_3 \qquad \text{(123 zyklisch)} \tag{9}$$

und kommutieren mit N.

(d) Das "Quadrat des Drehimpulses" hängt wie folgt mit der Energie zusammen:

$$J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = \frac{N^2 - \mathbb{1}}{4} \tag{10}$$

(e) Machen Sie sich klar, dass Gl.(10) das Spektrum des zweidimensionalen Oszillators und seine Entartungen richtig wiedergibt. Insbesondere ist der Grundzustand $|0, 0\rangle$ ... erste angeregte Zustände: 2D Darstellung der Drehgruppe

<u>Hinweis:</u> Das Spektrum des 2D-Oszillators ist schnell hingeschrieben: $E(n_x, n_y) = \hbar\omega(n_x + \frac{1}{2} + n_y + \frac{1}{2})$, $n_x, n_y \in \mathbb{N}_0$, schließlich zerfällt die Energie in eine Summe aus zwei unabhängigen harmonischen Oszillatoren.