Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2015) -

Übungsblatt 07 ($20 + \pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 04.06.15 – Abgabe 08.06.15 – Besprechung n.V.

▷ **Aufgabe 1 (Messwertverteilungen Wasserstoffelektron)** (6 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie die Wellenfunktion des Grundzustandes eines Wasserstoffelektrons (ohne Spin) kennengelernt,

$$\psi_{1,0,0}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0} \,, \tag{1}$$

wobei a_0 Bohr'scher Radius.

(a) Wie lautete die Wahrscheinlichkeitsdichte, bei einer Ortsmessung das Elektron im Abstand a vom Kern zu finden? Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte!

(b) Zeigen Sie, daß die Wellenfunktion des Grundzustandes in der Impulsdarstellung durch

$$\tilde{\psi}(\vec{k}) = \frac{2^{3/2}}{\pi} \frac{1}{a_0^{5/2}} \frac{1}{\left(k^2 + a_0^{-2}\right)^2} \tag{2}$$

gegeben ist.

(c) Wie lautet die Wahrscheinlichkeitsdichte, bei einer Impulsmessung die Wellenzahl $k = |\vec{k}|$ zu finden (Erinnerung: $\vec{p} = \hbar\vec{k}$)?

▷ **Aufgabe 2 (Erhaltungsgrößen im Zweikörperproblem)** (9 Punkte)

Gegeben zwei Punktteilchen im physikalischen Raum, dem $\mathbb{R}^3$, deren kanonisch konjugierten Koordinaten(-Vektoren) und Impulse mit $\hat{\vec{q}}^{(i)}$, $\hat{\vec{p}}^{(i)}$, $i = 1, 2$ bezeichnet seien. Die fundamentalen Kommutatoren lauten

$$\left[\hat{q}_i^{(\alpha)}, \hat{p}_j^{(\beta)}\right] = i\hbar\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} \tag{3}$$

alle anderen Kommutatoren Null.

(a) In der Orstdarstellung für jedes der beiden Teilchen ist die quantenmechanische Wellenfunktion des zwei-Teilchen Systems zu jedem Zeitpunkt t eine komplexwertige Funktion von 6 Variablen, $\Psi(x^{(1)}, y^{(1)}, \ldots, z^{(2)})$. Welche physikalische Bedeutung hat diese Wellenfunktion im Bezug auf eine Ortsmessung der beiden Teilchen?

Beschränkt man sich auf konservative Wechselwirkung (kein Vektorpotential), und nimmt an, daß keine externen Kräfte wirken, lautet der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^{(1)2}}{2m^{(1)}} + \frac{\hat{\vec{p}}^{(2)2}}{2m^{(2)}} + V\big(|\hat{\vec{q}}^{(1)} - \hat{\vec{q}}^{(2)}|\big) \,. \tag{4}$$

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

Die Funktion V bezeichnet hier das *Wechselwirkungspotential* der beiden Teilchen. Die ausschließliche Abhängigkeit des WW-Potentials vom Abstand der beiden Teilchen respektieren die Homogenität und Isotropie des Raumes und die Homogenität der Zeit.

(b) Homogenität des Raumes besagt, daß kein Raumpunkt ausgezeichnet ist. Mathematisch ist die Wechselwirkung invariant unter einer Verschiebung des Koordinatenursprungs, sie hängt nur von den Relativkoordinaten $\hat{\vec{q}}$ ab,

$$\hat{\vec{q}} := \hat{\vec{q}}^{(1)} - \hat{\vec{q}}^{(2)} \tag{5}$$

nicht aber von den Schwerpunktskoordinaten,

$$\hat{\vec{Q}} := \frac{m^{(1)}\hat{\vec{q}}^{(1)} + m^{(2)}\hat{\vec{q}}^{(2)}}{m^{(1)} + m^{(2)}} \tag{6}$$

Welche Erhaltungsgrößen sind mit dieser Invarianz verknüpft?

Hinweis: Denken Sie an alle Erhaltungsgrößen eines freien Teilchens. Bezeichnen Sie, falls er Ihnen über den Weg läuft,

$$\hat{\vec{P}} := \hat{\vec{p}}^{(1)} + \hat{\vec{p}}^{(2)} \tag{7}$$

den Gesamtimpuls (= Schwerpunktimpuls) des Zwei-Teilchensystems, und

$$\hat{\vec{\ell}}_{\mathrm{S}} := \hat{\vec{Q}} \times \hat{\vec{P}} \tag{8}$$

den Drehimpuls der Schwerpunktbewegung (*nicht* Gesamtdrehimpuls!).

(c) Zeigen Sie, dass

$$\hat{\vec{p}} = \frac{m^{(2)}\hat{\vec{p}}^{(1)} - m^{(1)}\hat{\vec{p}}^{(2)}}{m^{(1)} + m^{(2)}} \tag{9}$$

den zu $\hat{\vec{q}}$ kanonisch konjugierten Impuls der Relativbewegung bezeichnet. Ist die Transformation $\left\{\hat{\vec{q}}^{(1)}, \hat{\vec{p}}^{(1)}, \hat{\vec{q}}^{(2)}, \hat{\vec{p}}^{(2)}\right\} \to \left\{\hat{\vec{Q}}, \hat{\vec{P}}, \hat{\vec{q}}, \hat{\vec{p}}\right\}$ kanonisch?

(d) Zeigen Sie, dass der Gesamtdrehimpuls $\hat{\vec{L}} \equiv \hat{\vec{\ell}}^{(1)} + \hat{\vec{\ell}}^{(2)}$ sich in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten ausdrückt

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{Q}} \times \hat{\vec{P}} + \hat{\vec{q}} \times \hat{\vec{p}} \tag{10}$$

(e) Zeigen Sie, dass sich in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten der Hamiltonoperator ausdrückt (1 Punkt)

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{P}}^2}{2M} + \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + V(|\hat{\vec{q}}|)\,. \tag{11}$$

(f) Isotropie des Raumes besagt, daß keine Richtung im Raum ausgezeichnet ist. Mathematisch ist das WW-Potential daher invariant unter Drehungen des Radiusvektors $\hat{\vec{q}}$. Welche Erhaltungsgröße ist mit dieser Invarianz verknpft?

(g) Homogenität der Zeit besagt, daß kein Zeitpunkt ausgezeichnet ist. Mathematisch hängt das WW-Potential daher nicht explizit von der Zeit ab. Welche Erhaltungsgröße der Relativbewegung ist mit dieser Invarianz verknüpft?

(h) Zeigen Sie: Die allgemeine Lösung der zwei-Teilchen Schrödingergleichung lässt sich als lineare Superposition von Produktvektoren der Gestalt $|\Phi(t)\rangle \otimes |\psi(t)\rangle$ darstellen, wobei die Faktoren $|\Phi(t)\rangle$ bzw. $|\psi(t)\rangle$ Vektoren im Hilbertraum der Schwerpunkts- bzw. Relativbewegung sind. Insbesondere gilt aufgrund der Separierbarkeit des Hamiltonoperators, vgl. (11),

$$i\hbar|\dot{\Phi(t)}\rangle = \frac{\hat{\vec{P}}^2}{2M}|\Phi(t)\rangle\,, \tag{12}$$

$$i\hbar|\dot{\psi(t)}\rangle = \left[\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + V(|\hat{\vec{q}}|)\right]|\psi(t)\rangle\,. \tag{13}$$

▷ Aufgabe 3* (5 Punkte)

Die Bewegungsgleichung einer Punktldadung (Masse m, Ladung e) im elektromagnetischen Feld, daran sei erinnert, lautet im nicht-relativistischen Regime

$$m\ddot{\vec{q}} = e\left[\vec{E}(\vec{q},t) + \dot{\vec{q}} \times \vec{B}(\vec{q},t)\right]\,. \tag{14}$$

Zeigen Sie, dass

$$H(\vec{q},\vec{p},t) = \frac{1}{2m}\left[\vec{p} - e\vec{A}(\vec{q},t)\right]^2 + e\Phi(\vec{q},t) \tag{15}$$

Hamiltonfunktion zur Bewegungsgleichung (14) (mit $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$).

▷ Aufgabe 4 ($\hbar$ im Labor . . .) (π Punkte)

Angenommen Sie haben gerade ein Doppelspaltexperiment zum Nachweis von Materiewellen aufgebaut. Erste Probeläufe mit monochromatischen Teilchen ergeben einen Streifenabstand a. Sie lassen das Experiment über Nacht laufen und gehen zu Bett. Am nächsten Morgen lesen Sie in der Zeitung, jemand habe über Nacht den Wert von $\hbar$ geändert, alle anderen Naturkonstanten (Elementraladung e, Lichtgeschwindigkeit c etc) jedoch nicht angerührt. Auf dem Weg zum Labor kommen Sie zu der Überzeugung, eine Änderung von $\hbar$ müsse sich in einem veränderten Streifenabstand niederschlagen. “Schließlich” – so Ihr Argument – “bedeute die De-Broglie Beziehung $\lambda = 2\pi\hbar/p$ eine lineare Abängigkeit der Wellenlänge, und damit des Streifenabstandes, von $\hbar$.” Vor dem Labor angekommen plagen Sie leise Zweifel. Endgültige Gewissheit bringt nur ein Blick auf die Messdaten – und die besagen WAS?

Bemerkung: Beachten Sie, daß sich bei Änderung von $\hbar$ alle möglichen Dinge ändern, beispielsweise die Größe eines Atoms (gemessen relativ – zu was?). Das einzige was sich sicherlich nicht ändert ist der Wahrheitsgehalt von Aussagen wie “In dieser Kiste befinden sich 17 Kartoffeln”.

Sie dürfen sich auch ruhig mal den Spaß machen, andere PhysikerInnen mit der Frage zu belästigen . . . .