Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2015) -
Übungsblatt 08 ($20+\pi$ Punkte)[1]
Ausgabe 15.06.15 – Abgabe 22.06.15 – Besprechung n.V.

▷ **Aufgabe 1 (Drehimpulsunschärfen)*** (5 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Varianzen der x- und y-Komponenten des Bahndrehmpulses in Standardzuständen $|\ell m\rangle$.

(b) Berechnen Sie die Varianz der x- und y-Komponenten eines Spin-$\frac{1}{2}$ in den Zuständen $|\uparrow_z\rangle, |\downarrow_z\rangle$.

▷ **Aufgabe 2 (Paulimatrizen und Spin-**$1/2$**)*** (10 Punkte)

Gegeben die sog *Paulimatrizen*

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie: Die durch

$$\hat{s}_a = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_a\,, \qquad a = x, y, z \tag{2}$$

definierten Operatoren genügen der Drehimpulsalgebra.
Bemerkung: Angesichts dieser Tatsache dürfen die drei Operatoren $\hat{\sigma}_a$, bzw. $\hat{s}_a$, als kartesische Komponenten eines Euklidischen Vektoroperators $\hat{\vec{\sigma}}$, bzw. $\hat{\vec{s}}$, aufgefasst werden, genannt *Paulispin*. Vektoroperator heisst in diesem Zusammenhang, dass sich seine Komponenten unter Drehungen des Koordinatensystems wie kartesische Komponenten des Koordinatenvektors transformieren.

(b) Die Länge des Spins sei durch $\hat{\vec{s}}^2 = \hat{s}_x^2 + \hat{s}_y^2 + \hat{s}_z^2$ definiert. Wie lautet seine Matrixdarstellung?

(c) Zeigen Sie: Für kartesische Komponenten $\hat{\sigma}_a$, $a = x, y, z$ gilt:

$$\hat{\sigma}_a\hat{\sigma}_b = i\hat{\sigma}_c\,, \qquad \hat{\sigma}_a\hat{\sigma}_b\hat{\sigma}_c = i\hat{1}\,, \qquad (abc = xyz \text{ zyklisch})\,. \tag{3}$$

(d) Es sei $\vec{a}$ ein Euklidischer Einheitsvektor, und $\hat{\sigma}_a = \vec{a}\cdot\hat{\vec{\sigma}}$ die kartesische Komponente des Paulispins in $\vec{a}$-Richtung. Zeigen Sie:

$$\hat{\sigma}_a^2 = \hat{1}\,, \qquad \mathrm{Tr}\left\{\hat{\sigma}_a\right\} = 0\,, \qquad \mathrm{Det}\left\{\hat{\sigma}_a\right\} = -1\,, \tag{4}$$

wobei Tr die Spur (engl. *trace*), d.h. die Summe der Diagonalelemente, und Det die Determinante, d.h. das Produkt der Eigenwerte bezeichnet.

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft …

(e) Was sind die Eigenwerte von $\hat{\sigma}_a$?

(f) Seien nun mit $|0\rangle$, $|1\rangle$ die Eigenvektoren von $\hat{\sigma}_z$ zu den Eigenwerten $\sigma = -1$, $\sigma = +1$, und $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ein Zustandsvektor. Welche Bedeutung haben die komplexen Koeffizienten α, β?

(g) Wir betrachten nun die Messung von $\hat{\sigma}_x$ im Zustand $|\psi\rangle$ wie in (f). Welche Messwerte dürfen mit welcher Wahrscheinlichkeit erwartet werden?

(h) Für den in (f) spezifizierten Zustand wird nun eine Messung von $\hat{\sigma}_z$ gefolgt von einer Messung von $\hat{\sigma}_x$ analysiert. Was können Sie über die zu erwartenden Messresultate sagen?

▷ **Aufgabe 3 (Noch mehr Spinologie . . .)** (5 Punkte)

["Freiwillig", aber nützlich, und möglicherweise klausurrelevant . . .]

Betrachte den Operator

$$\hat{U}_{\phi\vec{n}} := \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\phi\vec{n}\cdot\hat{\vec{s}}\right\} \tag{5}$$

wobei $\vec{n}$ Euklidischer Einheitsvektor, ϕ reell und $\hat{\vec{s}}$ der Spinvektoroperator eines Spin-1/2 Teilchens.

Wie lautet $\hat{U}$ in der Standard-Matrixdarstellung?

<u>Hinweis:</u> Sie werden sich doch an die Reihendarstellung der e-Funktion erinnern? Möglicherweise auch an $e^{ix} = \cos(x)+i\sin(x)$? Und wenn Sie sich jetzt noch (4) vergegenwärtigen sind Sie auch schon fertig . . .

▷ **Aufgabe 4 (Wohnst-Du-noch)** (π Punkte)

Bei einem Möbelhaus Ihrer Wahl kaufen Sie Spin-1/2 Teilchen. Beim Auspacken stellen Sie fest, dass man vergessen hat, den Zustand auf dem Beipackzettel anzugeben. Geben Sie ein Verfahren an, um den Zustand der erworbenen Teilchen zu charakterisieren. Zur Verfügung steht Ihnen ein Stern-Gerlach Magnet mit variabler Orientierung.