Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2015) -

Übungsblatt 10 (20 Punkte)

Ausgabe 06.07.15 – Abgabe 13.07.15 – Besprechung n.V.

▷ Aufgabe 1 (HO mit Heisenberg) (4 Punkte)

[“Pflicht” und klausurrelevant …]

Wir betrachten den harmonischen Oszillator im konstanten Kraftfeld. Die Hamiltonfunktion lautet

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 - Fq \tag{1}$$

mit F eine reelle Konstante.

(a) Stellen Sie die klassischen Bewegungsgleichungen auf. Geben Sie die allgemeine Lösung an.

(b) Quantisieren Sie das System. Stellen Sie die Heisenberg’schen Bewegungsgleichungen auf, und geben Sie die Lösung an.

Hinweis: Es ist hilfreich beizeiten ein quadratische Ergänzung vorzunehmen, $\frac{m\omega^2}{2}q^2 - Fq = \frac{m\omega^2}{2}\left(q - \frac{F}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{F^2}{2m\omega^2}$.

▷ Aufgabe 2 (Ehrenfest’sches Theorem) (4 Punkte)

[“Pflicht” – und klausurrelevant …]

Bewegen sich die Zustände, so bewegen sich auch die Erwartungswerte. Für den Massepunkt mit Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m) + V(\hat{q})$ gilt hier das

Satz (Ehrenfest’sches Theorem I) Die klassische Bewegungsgleichung der Newton’schen Mechanik gilt *im Mittel*,

$$m\frac{d^2}{dt^2}\langle \hat{q}\rangle = \langle \hat{F}\rangle \tag{2}$$

mit $\hat{F} \equiv F(\hat{q})$ Kraftoperator,

$$\hat{F} = -\frac{\partial V(\hat{q})}{\partial \hat{q}}\,. \tag{3}$$

Beweisen Sie das Ehrenfestsche Theorem I. Genießen Sie anschließend die formale Analogie zur klassischen Mechanik. Für ein freies Teilchen, ein Teilchen im konstanten Kraftfeld, und den harmonischen Oszillator wird aus Ehrenfest sogar genau die Newton’sche Bewegungsgleichung der klassischen Mechanik. In allen anderen Fällen, also in Fällen wo $\langle F(\hat{q})\rangle \neq F(\langle \hat{q}\rangle)$, gilt dies zwar nicht genau – aber möglicherweise näherungsweise:

Satz (Ehrenfest'sches Theorem II) Für genügend langsam veränderliche Kraftfelder

$$\varepsilon := \frac{\delta_\psi^2 q F''(q)}{2F(q)} \ll 1 \tag{4}$$

bewegt sich der Erwartungswert $\langle \hat{q} \rangle_\psi := q$ gemäß der Newton'schen Bewegungsgleichung, $m\ddot{q} = F(q)$.

Auch dieses Theorem bitten wir Sie zu beweisen. "Genügend langsam veränderlich" heißt übrigens, dass sich die Stärke der Kraft über die (räumliche) Ausdehnung des Wellenpaketes $|\psi(x,t)|^2$ nicht wesentlich ändert. In diesem Fall darf das quantenmechanische Punktteilchen als klassisches Punktteilchen am Ort $q = \langle \hat{q} \rangle_\psi$ aufgefasst werden.

▷ **Aufgabe 3 (Atom-Licht Wechselwirkung)** (6 Punkte)

Wir betrachten die Wechselwirkung eines Kepleratoms mit einem klassischen Lichtfeld. Der Hamiltonoperator liest sich

$$\hat{H}(t) = \underbrace{\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} - \frac{e^2}{|\hat{\vec{q}}|}}_{:=\hat{H}_0} - \underbrace{e\hat{\vec{q}} \cdot \vec{E}(t)}_{:=-\hat{V}(t)} \tag{5}$$

worin $\vec{E}(t) = \vec{\mathcal{E}} e^{-i\omega t} + c.c$ die elektrische Feldamplitude am Ort des Atoms, und $e\hat{\vec{q}}$ das atomare Dipolmoment. Die Eigenwerte bzw Eigenvektoren des ungestörten Hamiltonoperators seien bezeichnet $E_{n\ell} = -mc^2 \frac{\alpha^2}{2n^2}$ bzw $|n\ell m\rangle$, wobei $n = 1, 2, \ldots$, $\ell = 0, \ldots, n-1$, $m = -\ell, \ldots, \ell$ und α die Feinstrukturkonstante.

(a) Transformieren Sie die Schrödingergleichung $i\hbar|\dot{\Psi}\rangle = \hat{H}(t)|\Psi\rangle$ in ein Wechselwirkungsbild.

(b) Berechnen Sie in führender Ordnung Störungstheorie die Wahrscheinlichkeit, das Atom, das sich anfänglich im Grundzustand $|100\rangle$ befinden möge, zum Zeitpunkt t in einem ersten angeregten Zustand $|11m = 0, \pm 1\rangle$ zu finden. Geben Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten an für lineare Polarisation, $\vec{\mathcal{E}} \propto \vec{e}_z$, und für zirkulare Polarisationen $\vec{\mathcal{E}} \propto \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y)$.

(c) Für den resonanten Fall $\omega \approx \omega_{21} := (E_{21} - E_{10})/\hbar$ ist die Störungstheorie nicht geeignet. Wie groß muss die Verstimmung $\delta_{21} := \omega_{21} - \omega$ mindestens sein, damit die Störungstheorie angewendet werden darf? Versuchen Sie, den resonanten Fall $\delta_{21} \approx 0$ zu analysieren (Stichwort: Zwei-Niveau Atom – s. nächste Aufgabe).

▷ **Aufgabe 4 (Zwei-Niveau Atom im Lichtfeld)** (6 Punkte)

Das "Zwei-Zustands System", auch genannt "2-Niveau Atom", "Spin im Magnetfeld" oder "qubit" ist charakterisiert durch einen zwei-dimensionalen Hilbertraum mit Basiszuständen $|e\rangle, |g\rangle$ (im Kontext Atomphysik) und einen Hamiltonoperator, der – in der sog *Drehwellennäherung* – formuliert werden kann

$$\hat{H}(t) = \hbar\omega_0 \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + \frac{\hbar\Omega_0}{2} e^{i\omega t} \hat{\sigma} + \frac{\hbar\Omega_0^*}{2} e^{i\omega t} \hat{\sigma}^\dagger \tag{6}$$

worin $\hat{\sigma} = |g\rangle\langle e|$.

(a) Ich behaupte, die durch $\hat{H}$ beschriebene Dynamik haben Sie schon mal analysiert. Wann war das, und in welchem Kontext?

(b) Wie lauten die Heisenberg-Bewegungsgleichungen der Operatoren $\hat{\sigma}$, $\hat{\sigma}^\dagger$?

(c) Welche physikalische Bedeutung haben die Erwartungswerte von $\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^\dagger$ und $\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}$?

(d) Die explizite Zeitabhängigkeit von $\hat{H}(t)$ ist natürlich unangenehm. Um damit fertig zu werden empfiehlt sich ein Wechselwirkungsbild mit "ungestörtem" Hamiltonoperator $\hat{H}_0 := \hbar\omega\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}$. Wie transformiert sich $\hat{H}(t)$ unter diesem Bildwechsel? Ist es möglich, dass im Wechselwirkungsbild die Schrödingergleichung für den transformierten Zustand $|\tilde{\psi}(t)\rangle := e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t)}|\psi(t)\rangle$ in etwa lautet $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\tilde{\psi}\rangle = \tilde{H}|\tilde{\psi}\rangle$ mit

$$\tilde{H} = \hbar(\omega_0 - \omega) + \frac{\hbar\Omega_0}{2}\hat{\sigma} + \frac{\hbar\Omega_0^*}{2}\hat{\sigma}^\dagger \tag{7}$$

(e) Für ein Atom das sich anfänglich im Grundzustand befindet bestimme man die W'keit, dass es zur Zeit t im angeregten Zustand gefunden wird.

(f) Zum Hamiltonoperator $\tilde{H}$ kann man natürlich auch wieder die entsprechenden Heisenbergschen Bewegungsgleichungen aufstellen – und sogar lösen! Wir bitten darum ...

