

Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2015) -
Übungsblatt 11 (20 Punkte)
Ausgabe 13.07.15 – Abgabe 20.07.15 – Besprechung n.V.

▷ **Aufgabe 1** (6 Punkte)

Für die auslaufende Kugelwelle $\psi(\vec{x}, t) = f \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r}$ berechne man die W'keitsstromdichte $\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} [\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*]$.

▷ **Aufgabe 2 (Yukawa-Streuung)*** (8 Punkte)

Illustrativ das Beispiel der Streuung am Yukawapotential

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \quad (1)$$

für die wir Sie bitten, die Streuamplitude, den differentiellen und den totalen Streuquerschnitt in der ersten Born'schen Näherung zu berechnen. Diskutieren Sie bitte auch den Grenzfall $\mu, V_0 \rightarrow 0$ mit $V_0/\mu = ZZ'e^2/(4\pi\epsilon_0)$ fest, in dem das Yukawapotential die Form des Coulomb- bzw. Gravitationspotentials annimmt.

▷ **Aufgabe 3 (Länderfusion Berlin-Brandenburg)** (3 Punkte)

In Berlin und in Potsdam hat man je ein Elektron in einer Falle eingesperrt und dort präpariert – in Potsdam im Zustand ϕ , in Berlin im Zustand χ . Die Potsdamer nennen ihr Elektron liebevoll “Fritzchen”, die Berliner das ihrige zärtlich “Marlene”. In der Länderfusionskommission wird der Zustand des Zwei-Elektronensystems gemäß

$$|\Psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle \quad (2)$$

zu den Akten genommen, wobei der erste Faktor den Zustand von Fritzchen, der zweite Faktor den Zustand von Marlene beschreibt.

Da kommt ein naseweiser Professor, und behauptet das ganze wäre unzulässig – schließlich wären Elektronen grundsätzlich ununterscheidbare Fermionen. Der Zustand müsse also in Form

$$|\Psi\rangle \propto |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle - |\chi\rangle \otimes |\phi\rangle \quad (3)$$

notiert werden, und von “Fritzchen” und “Marlene” dürfe man gleich garnicht reden.

Angesichts Ihrer erstklassigen Ausbildung in Physik werden Sie nun zum Schiedsrichter berufen und sollen den Streit schlichten. Hat der Professor Recht oder kann man mit der Entscheidung der Länderfusionskommission leben?

▷ **Aufgabe 4 (Gesellige Bosonen)** (3 Punkte)

[Total Klausurrelevant ...]

Bosonen unterliegen nicht dem Pauli-Verbot, und so könnte man meinen, Bosonen seien ziemlich gewöhnliche Zeitgenossen. Das ist aber ein Irrtum: während sich Fermionen gegenseitig aus dem Weg gehen, sind Bosonen über die Maßen gesellige Wesen. Betrachten wir das einfache Beispiel zweier Bosonen, die zwei orthogonale Orbitale ϕ und χ besetzen können. Wären die beiden Teilchen unterscheidbar – man nennt sie dann *Boltzonen* –, so könnte das Zwei-Teilchensystem in einem der vier Zustände $\phi\phi$, $\phi\chi$, $\chi\phi$ oder $\chi\chi$ gefunden werden, in der Hälfte der Fälle also im gleichen Zustand.

Zeigen Sie, dass wenn es sich bei den beiden um Bosonen handelt, sie in 2/3 der Fälle im gleichen Zustand zu finden sind.

Bemerkung: Verglichen mit ihren klassischen Vettern, den *Boltzonen*, habe Bosonen also eine natürliche Tendenz zusammen zu klumpen, engl *bunching*. Diese Tendenz, die sich allerdings erst bei niedrigen Temperaturen bemerkbar macht, ist für viele interessante Effekte der Tieftemperaturphysik verantwortlich, angefangen bei der Bose-Einstein Kondensation bis hin zur Supraleitung. Wem der Gang in ein Tieftemperaturlabor zu anstrengend ist, kann wahlweise auch mal in der Photonik vorbeischauchen. Auch die Photonen die beispielsweise von einem Laser erzeugt werden, haben die Tendenz zu Klumpen ...

▷ **Aufgabe 5 (Prisoners' Dilemma)**

(0 Punkte)

[Für Ihre Sozialkompetenz ...]

Take a friend, go to the bar, but don't order drinks immediately. Instead you agree on the following. Whoever orders a drink, must pay for the drink, but the other will enjoy the drink. Enjoying a drink, while the other has nothing gives maximal satisfaction 5 points (yes – it is a nasty game). Suffering without a drink while the other is enjoying his drink gives minimal satisfaction 0 points. Enjoying a drink in company gives 3 points, while joint suffering of both without drink gives 1 point (“at least I am not alone”).

Evidently, this is a two-player binary choice game (for each round the choice is “I order a drink” vs “I do not order a drink”), yet in contrast to ordinary board games (or the like), it is “non-zero sum” (contemplate on the outcome “nobody ever orders any drink” vs “both order a drink”). Surprisingly, this game has a solution which is easily found by rational reasoning (assuming that both you and your friend strive for maximal satisfaction). Unfortunately, however, this solution is rather frustrating which is why the game poses a dilemma ...

Background: The game runs under the title “Prisoners Dilemma” because, when it was invented in the 1950's, the story which comes with the game plays in the American System of Justice where deals between the various parties (prisoner, lawyer, attorney, judge) are quite common. The PD made some headlines in the eighties when Sociology tried to understand, how in a society of egoist, mutual cooperation (where, in the end, both enjoy their drink) can emerge. It was discovered, that the PD is the paradigm for the interaction between individuals, and the big question was, how the player could escape the Dilemma. In a computer tournament, led by Robert Axelrodt, it turned out that in an iterated PD (where the players play PD several times without knowing in advance, however, how often they will play), so called “Tit-for-Tat” is the most promising strategy: order the drink in the first move, and from then on do whatever your friend did in the previous move. Meanwhile, the game was quantized, see *Quantum Games and Quantum Strategies* by J. Eisert, M. Wilkens, and M. Lewenstein, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3077 (1999).