

Theoretische Physik
- Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie (SoSe 2016) -
Übungsblatt 1
Emission 04.04.16 – Digestion 08.04.16

▷ **Aufgabe 1 (Wurf und Krümmung)**

Der schiefe Wurf, daran sei erinnert, läßt sich in der Wurfebene (hier: XZ -Ebene, mit X die Horizontale, und Z die Höhe) beschreiben

$$x(t) = x_0 + u_0 t, \quad z(t) = z_0 + w_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (1)$$

worin x_0, z_0 Koordinaten des Abwurfpunktes, u_0, w_0 horizontale und vertikale Komponente der Abwurfgeschwindigkeit, und $g \approx 10 \text{m/s}^2$ die Erdbeschleunigung.

Wir betrachten die Wurfbewegung für zwei Körper, Ball und Geschoss. Die horizontalen Komponenten der Abwurfgeschwindigkeit seien $u_0 = 5 \text{m/s}$ für den Ball, und $u_0 = 500 \text{m/s}$ für das Geschoss. Die vertikale Komponente w_0 der Abwurfgeschwindigkeit sei jeweils so bestimmt, dass beide Körper die gleiche horizontale Entfernung $l = 10 \text{m}$ zurücklegen.

- (a) Berechnen Sie die Wurfhöhen und Wurfzeiten der beiden Körper.
- (b) Skizzieren Sie, wie in der Schule üblich, die Flugbahnen in der Wurfebene. Bestimmen Sie die Krümmungen der beiden Bahnen in der Wurfebene.
- (c) Skizzieren Sie nun die Flugbahnen in einem Raumzeitdiagramm, nun genannt *Weltlinien*. Zeitkoordinate sei ct mit $c \approx 3 \times 10^8 \text{m/s}$ die Lichtgeschwindigkeit. Bestätigen Sie, dass der Krümmungsradius der beiden Weltlinien für kleine Abwurfgeschwindigkeiten $u_0, w_0 \ll c$ gegeben ist

$$R = \frac{c^2}{g} \quad (2)$$

Bestätigen Sie, dass auf der Erde $R \approx 9 \times 10^{15} \text{m}$, also ungefähr ein Lichtjahr, $1 \text{Lj} = 9,46 \times 10^{15} \text{m}$.

Bemerkung: Der Krümmungsradius hängt nur von der Schwerebeschleunigung und der willkürlich gewählten Lichtgeschwindigkeit ab, nicht aber von der Abwurfgeschwindigkeit. M.a.W R ist eine universelle, die Gravitationswirkung der Erde charakterisierende, geometrische Größe. Aus Sicht der ART sind die Weltlinien von Wurfbewegungen so etwas wie die “Geraden” in einer gekrümmten Raumzeit. Dass sie in Ihrer Skizze (c) “krumm” daher kommen, liegt an der Wahl der Koordinaten: aus Sicht der ART ist die Erde ein beschleunigtes Bezugssystem, und die XYt -Koordinaten sind Koordinaten in einem beschleunigten Bezugssystem. Mehr auf dem nächsten Übungsblatt, Stichwort Rindler Raum-Zeit ...

▷ **Aufgabe 2 (Schwarze Sterne, Schwarze Löcher ...)**

Im Fahrwasser der Gravitationstheorie von Sir Isaac Newton (1643–1727) haben schon John Michell (1724–1793) und Pierre Laplace (1749–1827) darauf hingewiesen, dass Licht

von der Oberfläche eines Sternes nicht entkommen kann, sofern nur der Radius des Sternes kleiner ist als sein sog. *Gravitationsradius*,

$$R_G := \frac{2GM}{c^2}, \quad (3)$$

worin M die Masse des Sterns, $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{m}^3/(\text{kg s}^2)$ die Gravitationskonstante und c die Geschwindigkeit des emittierten Lichts. Für einen genügend weit entfernten Beobachter ist ein Stern mit Radius $R < R_G$ demnach unsichtbar bzw. schwarz.

- (a) Begründen Sie diese Aussage (Stichwort: Fluchtgeschwindigkeit).
- (b) Welche Werte haben die Gravitationsradien der Erde, der Sonne?
- (c) Unter der Annahme eines kugelförmigen Universums das aus einem “big bang” (großen Knall) geboren wurde – was ist angesichts seines Alters von ca 14 Milliarden Jahren die mittlere Energie-Massendichte im Universum?

Bemerkung: Häh? Dass die Erde und die Sonne in nullter Näherung kugelförmig sind hat man ja schon mal gehört. Aber das Universum? Und was hat denn das Alter mit der Massendichte zu tun? Nun ja, wie das uns zugängliche Universum im einzelnen aussieht wissen wir natürlich nicht. Wir können nur “begründet” vermuten. Dann vermuten wir mal “maximale Symmetrie auf ganz großen Skalen” (was denn sonst: eckig – gezackt – aber wo sollten die Zacken hinzeigen?), behaupten “Gravitationsradius Universum gleich Lichtgeschwindigkeit-mal-Alter” (was denn sonst?) und erhalten eine Abschätzung für den Gravitationsradius des Universum, und via (3) eine Abschätzung seiner Massen-Energiedichte. Vergleichen Sie bitte unbedingt Ihre Abschätzung mit den Daten der Astrophysik!

In der Allgemeinen Relativitätstheorie wird aus dem Gravitationsradius R_G der sog *Schwarzschildradius*. Der Schwarzschildradius definiert den Ereignishorizont einer kugelsymmetrischen Masseverteilung. Ist die Masse auf einem Radius $R < R_G$ konzentriert bildet solch eine Masseverteilung ein schwarzes Loch. Einem schwarzen Loch kann nicht entkommen, und alles was hinter den Ereignishorizont fällt ist ein-für-allemal verloren (bis auf Masse bzw. Energie, elektrische Ladung und Drehimpuls – die tragen bei ihrem Fall ins schwarze Loch additiv zu dessen entsprechenden Eigenschaften bei).

- (d) Vergleichen mit dem was Sie über schwarze Löcher schon gehört haben – inwiefern unterscheidet sich die Phänomenologie eines schwarzen Loches von einem im Laplace’schen Sinne schwarzen Stern?

▷ Aufgabe 3 (Planck-Skala)

Eine kugelförmige Masseverteilung definiert eine Längenskala GM/c^2 (halber Gravitationsradius, vgl. Gl. (3)).

Auch die Quantenmechanik des Massepunktes kommt mit einer charakteristischen Skala – der Comptonwellenlänge

$$\lambda_C = \hbar/(Mc) \quad (4)$$

worin \hbar das Planck’sche Wirkungsquantum und M die Masse des Teilchens. Hat man zwei Theorien, ART und QM, mit jeweils einer Längenskala R_G und λ_C , kann man eine

Längenskala definieren – hier genannt die Planck-Länge ℓ_{Pl} – auf der die beiden Theorien sich treffen,

$$\ell_{\text{Pl}} = \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 4 \times 10^{-35} \text{ m}. \quad (5)$$

(a) Geben Sie eine Herleitung der Planck-Länge, Gl. (5).

Interessant ist hier, dass diese Längenskala gar nicht von der Masse abhängt! Sie ist absolut – eine Naturkonstante wie G , c oder \hbar . Man vermutet daher, dass die Planck-Länge eine untere Grenze für die “Klassikalität = Glattheit” der Raumzeit definiert: auf Längenskalen unterhalb der Planck-Länge, so die Vermutung, ist die Raumzeit “schaumig” oder sonst irgendwie quantig. Die genaue Bedeutung dieser Metaphorik wird derzeit um die Ecke, im Max-Planck Institut für Gravitationsphysik erforscht.

Mit der Längenskala (5) in natürlicher Weise (Division durch c) assoziiert eine Zeitskala,

$$t_{\text{Pl}} := \sqrt{\hbar G/c^5} = 1,4 \times 10^{-43} \text{ s}, \quad (6)$$

via $E = \hbar\omega \propto \hbar t_{\text{Pl}}^{-1}$ eine Energieskala,

$$E_{\text{Pl}} = \sqrt{\hbar c^5/G} = 1.22 \times 10^{19} \text{ GeV}, \quad (7)$$

und via $E = mc^2$ eine Massenskala

$$m_{\text{Pl}} = \sqrt{\hbar c/G} = 2.18 \times 10^{-8} \text{ kg}. \quad (8)$$

Planck-Länge, -Zeit und -Masse sind Skalen, die die Gültigkeit der klassischen Physik “nach unten” begrenzt. Beispielsweise

(b) Zeigen Sie dass die Masse eines schwarzen Lochs mindestens von Ordnung der Planck-Masse m_{Pl} ist.

Hinweis: Versuchen Sie mal, ein schwarzes Loch zu lokalisieren, und erinnern Sie sich dabei an die Heisenberg’sche Unschärferelation ...

Als vor einigen Jahren der Large Hadron Collider (LHC) am CERN in Betrieb genommen wurde, haben machen Kollegen die Vermutung geäußert, es könnten kleine schwarze Löcher entstehen, die die ganze Welt verschlucken.

(c) Versuchen Sie die Argumente dieser Kollegen nachzuvollziehen (Stichwort: $E = mc^2$). Können Sie die Argumente entkräften?

Hinweis: Die Inbetriebnahme des LHC wird im Physik-Journal Oktober 2008 besprochen ...

▷ Aufgabe 4 (Starkes Äquivalenzprinzip)

Gemäß starkem Äquivalenzprinzip tragen alle an der Zusammensetzung eines Systems beteiligten Ruhemassen und Wechselwirkungsenergien gleichermaßen zur tragen wie zur schweren Masse bei.

Schätzen Sie die Beiträge der gravitativen Selbstenergie und der elektrodynamischen Bindungsenergie zur Masse der Erde ab.