Theoretische Physik
- Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie (SoSe 2015) -

Übungsblatt 2

Emission 08.04.15 – Digestion 09.04.15

▷ Aufgabe 1 (Synchronisation von Uhren)

Die Synchronisation der Uhren eines Inertialsystems basiert auf einem empirischen Befund und einer Konvention:

Befund: Auf geschlossenen Wegen ist das Verhältnis der Weglänge zur Rundreisezeit von Licht eine Naturkonstante,

$$\frac{\text{Weglänge } L}{\text{Rundreisezeit } T} := c = const. \tag{1}$$

Konvention (Kriterium "Gleichzeitigkeit"): Zwei Blitzereignisse heißen gleichzeitig wenn die Blitzfronten sich in der Mitte treffen.

(a) Zeigen Sie, dass der so eingeführte Begriff der Gleichzeitigkeit eine Äquivalenzrelation ist (wenn P gleichzeitig Q und Q gleichzeitig P, dann P gleichzeitig R).

(b) Geben Sie ein Verfahren an mit dem ein beliebiges Paar von Uhren eines Inertialsystems synchronisert werden kann.

Bemerkung: Teil (a) klingt irgenwie trivial – ist es aber nicht. Zu zeigen ist: unter Voraussetzung dass sich einerseits die Blitzfronten von P und Q in der Mitte treffen, andererseits die Blitzfronten von Q und R, dann auch die Blitzfronten von P und R. Die Schwierigkeit des Beweises beruht darauf, dass man nicht den üblichen Geschwindigkeitsbegriff verwenden darf, sondern allein den emprischen Befund in der angegebenen Formulierung (die Bestimmung der Konstanten c erfordert nur ein Längenmessgerät und *eine* Uhr für die Rundreisezeitbestimmung). Der übliche Geschwindigkeitsbegriff ist zunächst nicht geeignet, da er entweder eine mitreisende Uhr voraussetzt, was bei Licht nicht geht, oder zwei Uhren – eine am Start, eine am Ziel – die bereits synchronisiert sind. Synchronisierung – also (b) – ist aber erst möglich, wenn sichergestellt dass Gleichzeitigkeit eine Äquivalenzrelation, also (a).

▷ Aufgabe 2 (Gangenauigkeit realer Uhren)

Das Zeitnormal längs einer zeitartigen Weltlinie ist in der ART durch eine punktförmige Uhr definiert. Dummerweise sind reale Uhren nicht punktförmig, sondern ausgedehnt. Im Gravitationsfeld unterliegt der physikalische Mechanismus solcher physikalischer Uhren immer auch den Gezeitenkräften. Schätzen Sie den Einfluß der Gezeitenkräfte auf den Gang einer Atomuhr ab.

▷ Aufgabe 3 (Jungbrunnen Karussellfahrt I)

Ein Karussell drehe sich relativ zu einem Laborsystem mit der Winkelgeschwindigkeit Ω. Zeigen Sie, dass ein im Abstand R von der Karussellachse plazierter Fahrgast auf seiner mitgeführten Uhr als Zeit für eine Umdrehung

$$T_{\mathrm{rot}} = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2 R^2}{c^2}} T_{\mathrm{lab}} \tag{2}$$

abliest, wobei $T_{\mathrm{lab}} = 2\pi/\Omega$ die Zeit die eine baugleiche Uhr im Laborsystem für eine Umdrehung anzeigt.

Angesichts dieses Befundes – wieso eignet sich Karussellfahren als "Anti-Aging Therapie"?

Bemerkung: Auf dem nächsten Übungsblatt wird die Zentrifugalkraft als Jungbrunnen identifiziert ...

▷ Aufgabe 4 (Hyperbolische Bewegung und Rindler-Raumzeit)

Gegeben ein Reisender mit Namen Rindler, der sich bezüglich eines Inertialsystems beschleunigt bewegt, und zwar derartig, dass die Beschleunigung in seinem momentanen Ruhesystem eine konstante g. Herr Rindler führt eine Standarduhr mit sich, Anzeige τ, mit deren Hilfe er die Dauer von Prozessen längs seiner Weltlinie beurteilen kann. [1]

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen Inertialkoordinaten t, x, y, z derartig gewählt werden, dass die Beschleunigung in positiver x-Richtung erfolgt.

(a) Zeigen Sie, dass sich Rindlers Weltlinie in Koordinaten eines Inertialsystems darstellen läßt

$$t(\tau) = \frac{c}{g}\sinh(g\tau/c) + t_0\,, \tag{3}$$

$$x(\tau) = \frac{c^2}{g}\cosh(g\tau/c) + x_0 - \frac{c^2}{g}\,, \tag{4}$$

worin τ Rindlers Eigenzeit, t_0 die Anzeige der Uhr im Inertialsystem wenn seine Uhr $\tau = 0$ anzeigt, und x_0 die seine Ortskoordinate im Inertialsystem zur Zeit t_0.

Die Bewegung mit konstanter Beschelunigung heißt in der SRT auch "hyperbolische Bewegung". Warum wohl?

(b) Überzeugen Sie sich davon, dass Rindlers Geschwindigkeit relativ zum Inertialsystem gegeben ist

$$v(t) = \frac{(t-t_0)g}{\sqrt{1 + [(t-t_0)g/c]^2}} \tag{5}$$

[1] Der gleichmäßig beschleunigte Beobachter ist ein nützliches Modell – denken Sie nur an Ihren Raketentrip zu den Sternen aus der Elektrodynamik-Vorlesung. Im Kontext der Gravitationsphysik: Sei die Erde beipielsweise eine massive Scheibe und also das Schwerefeld homogen. Mit beiden Beinen fest auf dem Boden drückt die Schwerkraft Sie mit konstanter Erdbeschleunigung g nach unten. Gemäß Äquivalenzprinzip haben Sie den Eindruck, Sie säßen in einer Rakete, die relativ zu einem Inertialsystem (frei fallendes Bezugssystem "abstürzender Fahrstuhl") nach oben beschleunigt. Aus Sicht des abstürzenden Fahrstuhls sind Sie ein beschleunigter Beobachter.

und also nach hinreichend langer Zeit

$$|t - t_0| \gg c/g : \qquad |v(t)| \approx c\,. \tag{6}$$

Für die Erbeschleunigung $g = 9,81\text{m/sec}^2$ – was heißt hier “hinreichend lang” (i) im Inertialsystem, (ii) im Bezugssystem von Rindler?

(c) Zeigen Sie, dass Rindlers Gleichzeitigkeitsschnitte in den Minkowskikoordinaten des Inertialsystems Geraden sind, die sich in einem Punkt O mit Koordinaten $t_0, x_0 - c^2/g$ schneiden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen Sie $t_0 = 0$ und $x_0 = c^2/g$. Der Punkt O hat dann Minkowskikoordinaten $(0,0)$. Skizzieren Sie Rindlers Weltlinie nebst ausgesuchter Gleichzeitigkeitsschnitte (incl. Schnitte für $\tau = \pm\infty$) in der xt-Ebene der Minkowskikoordinaten des Inertialsystems.

(d) Der in (c) ausgewiesene Punkt O definiert eine Singularität von Rindlers Raumzeit: für ihn währt das Ereignis O ewig. Überzeugen Sie sich davon, dass sich aus Rindlers Sicht die Singularität immer in räumlicher Entfernung c^2/g befindet. Welchen Wert hat diese Entfernung für die Erdbeschleunigung $g = 9,81\text{m/sec}^2$?

(e) Rindlers Gleichzeitigkeitsschnitte partinionieren seine Raumzeit in vier Bereiche: Ereignisse unterhalb $\tau = +\infty$ können ihn beeinflussen, aber nur Ereignisse oberhalb $\tau = -\infty$ können von ihm beeinflusst werden. “Zwei-Weg Kommunikation” ist daher nur im Quadranten $\tau = \infty < t < \tau = -\infty$ möglich, während Ereignisse im komplementären Quadranten $\tau = +\infty < t < \tau = -\infty$ absolut unzugänglich sind, kurz “hinter dem Horizont”. Mehr noch: zwei Ereignisse dieses Quadranten, die im Inertialsystem zeitartig nacheinander angeordent sind, sind aus Rindlers Sicht zeitartig voreinander angeordnet: in diesem Quadranten ist aus seiner Sicht die Kausalbeziehung ‘nvertiert” (Tod vor Geburt). Ereignisse im Quadranten $t < \tau = \pm\infty$ liegen aus Rindlers Sicht vor der Zeit – sie können nicht datiert werden. Ereignisse im Quadranten $t > \tau = \pm\infty$ liegen aus seiner Sicht nach der Zeit – auch sie können nicht datiert werden.

(f) Rindler errichtet sein Bezugssystem $\bar{x}, \tau$, bestehend aus räumlichen Markierungen, die in regelmäßigen Abständen links und rechts von ihm angebracht, und relativ zu ihm in Ruhe sind. Als Zeitstandard verwendet er seine Eigenzeit τ. Er selbst legt seine Ortskoordinaten fest $\bar{x} = 0$. Geben Sie den Kartenwechsel von Minkowskikoordinaten (x, t) zu den Erdlingskoordinaten $(\bar{x}, \tau)$ an. Wie drückt sich der Minkowskiabstand ds^2 in seinen Koordinaten aus?

(g) Eine andere Geschichte: Zwei Raketen, in einem Intertialsystem zunächst ruhend nacheinander angeordente, die durch eine unwägbare Schnur verbunden sind, starten zur gleichen Zeit mit gleicher Beschleunigung g ($= const.$ im jeweiligen Bezugsystem der Raketen). Nach einer Zeit T ist Brennschluss. Frage: ist nach Brennschluss die Schnur gerissen oder nicht? Noch ’ne Frage: was ist eigentlich der Unterschied zu (f)?