Mathematische Bissen
- Gruppentheorie für PhysikerInnen -

Übungsblatt 1 ($20 + \pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 15.04.16 – Abgabe 21.04.16 – Besprechung 22.04.16

▷ Aufgabe 1 (Ja oder Nein) (1 Punkt)

Es sei $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen incl 0; jemand behauptet $(\mathbb{N}_0, +, 0)$ bilde eine Gruppe. Sie

- ☐ stimmen zu
- ☐ stimmen nicht zu

▷ Aufgabe 2 (Dimension von Matrixgruppe I) (1 Punkt)

Die Dimension der generell linearen Gruppe $GL(n, \mathbb{C})$ ist

- ☐ n, schließlich sind das n-dimensionale Matrizen
- ☐ n^2, schließlich haben die n^2 Elemente
- ☐ $2n^2$, schließlich gibt es Real- und Imaginärteil

▷ Aufgabe 3 (Dimension von Matrixgruppen II) (2 Punkte)

Die $SO(n)$ ist Menge aller unimodularen reellen $n \times n$-Matrizen (Matrizen mit Determinante 1) deren Transponierte gleich dem Inversen.

Zeigen Sie, dass die $SO(n)$ mit Verknüprung "Matrixmultiplikation" und Neutralelemet "Einheitsmatrix" eine $n(n-1)/2$-dimensionale Gruppe bilden.

▷ Aufgabe 4 (Dimension von Matrixgruppen III) (2 Punkte)

Die $SU(n)$ ist Menge aller unimodularen komplexen $n \times n$-Matrizen (Matrizen mit Determinante 1) deren Adjungierte gleich dem Inversen.

Zeigen Sie, dass die $SU(n)$ mit Verknüprung "Matrixmultiplikation" und Neutralelemet "Einheitsmatrix" eine $n(n+1)/2$-dimensionale Gruppe bilden. Für welche Paare m, n hat die $SU(m)$ die gleiche Dimension wie die $SO(n)$?

▷ Aufgabe 5 (Gruppen der Ordnung 3) (2 Punkte)

Zeigen Sie: Es gibt genau eine abstrakte Gruppe der Ordnung 3, und die ist isomorph C_3. Geben Sie ein Handvoll Realisierungen an.

▷ Aufgabe 6 (Gruppen der Ordnung 4) (3 Punkte)

Zeigen Sie: Es gibt genau zwei abstrakte Gruppe der Ordnung 4, eine isomorph C_4, die andere isomorph $V_4 \cong C_2 \otimes C_2$, sog *Klein'sche Vierergruppe.*

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

▷ Aufgabe 7 (Gruppen der Ordnung n) (3 Punkte)

Zeigen Sie: Jede Gruppe G, deren Ordnung n eine Primzahl ist, ist isomorph zur zyklischen Gruppe C_n, $G \cong C_n$.

▷ Aufgabe 8 (Eulers Theorem) (6 Punkte)

Eulers Theorem besagt, dass jede Drehmatrix $\underline{R} \in SO(3)$ einen Eigenvektor zum Eigenwert 1 aufweist. Entsprechend sind alle Vektoren $\underline{v}$, die diesem Eigenvektor proportional sind, invariant unter $\underline{R}$, d.h. $\underline{R}\ \underline{v} = \underline{v}$, und das bedeutet, dass $\underline{R}$ eine Gerade auszeichnet – die Drehachse.

(a) Erinnern Sie sich, dass λ Eigenwert einer Matrix $\underline{R}$ äquivalent $\det(\underline{R} - \lambda\underline{1}) = 0$. Beweisen Sie Eulers Theorem, indem Sie zeigen $\det(\underline{R} - \underline{1}) = 0$.
Hinweis: Nutzen Sie ausschießlich die Orthogonalität der $\underline{R}$ und Eigenschaften der Determinante.

(b) Gilt Eulers Theorem auch für die $SO(2)$, allgemeiner für $SO(2n)$?

▷ Aufgabe 9 (Rubik's Cube) (π Punkte)

Rubik's Zauberwürfel ist Ihnen villeicht in der Vorlesung gezeigt worden (sonst im Netz wühlen). Hier nun ein kurzes Zitat[2]

> Ideal Toy Company stated on the package of the original Rubik cube that there were more than three billion possible states the cube could attain. It's analogous to Mac Donald's proudly announcing that they've sold more than 120 hamburgers. (J. A. Paulos, Innumeracy)

verbunden mit der Bitte, einmal die Anzahl der möglichen Zustände des Würfels (bei fester Lage des unsichtbaren Zentralwürfelchens) abzuschätzen.

[2] gefunden auf `http://www.gap-system.org/Gap3/Doc3/Examples3/rubik.html`