Mathematische Bissen
- Gruppentheorie für PhysikerInnen -

Übungsblatt 2 ($20 + \pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 29.04.16 – Abgabe 12.05.16 – Besprechung 13.05.16

▷ Aufgabe 1 (Konjugationsklassen) (10 Punkte)

Zwei Elemente a und b einer Gruppe G heißen **konjugiert**, falls ein Gruppenelement g exisitert, genannt das konjugierende Element, so dass $a = gbg^{-1}$. Zeigen Sie:

(a) Die Beziehung "a ist zu b konjugiert" ist eine Äquivalenzrelation, $a \sim b \Leftrightarrow \exists g \in G : a = gbg^{-1}$.[2]

(b) Zwei $SO(3)$-Drehungen um möglicherweise verschiedene Achsen sind genau dann konjugiert, wenn die Drehwinkel gleich.

Nun induziert eine Äquivalenzrelation auf einer Menge immer auch eine vollständige Partition – man sagt auch Zerlegung – in disjunkte Äquivalenzklassen, im vorliegenden Fall genannt **Konjugationsklassen**, notiert $[a] := \{b | b = gag^{-1}, g \in G\}$. Zeigen Sie:

(c) Die Konjugationsklassen der $SO(3)$ sind die Drehwinkel ϕ der $(\vec{n}, \phi)$-Parametrisierung.

Diese Einsicht wird sich bei der Diskussion der Drehungen in Euler-Parametrisierung (mittels Eulerwinkel) als nützlich erweisen.

▷ Aufgabe 2 (Raumgruppen) (10 Punkte)

Interessante Gruppen der Physik entstehen oft als Untergruppen einer größeren Gruppe durch eine Zusatzbedingung; sehr ergiebig ist dieses Verfahren bei der Untersuchung der Symmetrien von Kristallen, die man durch ihre jeweilige **Raumgruppe** beschreibt. Mutter aller Raumgruppen ist die **Euklidische Gruppe**, hier beschrieben

$$\mathcal{E}(V) = \{(R|\vec{t}) \text{ wobei } R \in O(V) \text{ und } \vec{t} \in V\}\,. \tag{1}$$

mit Gruppenverknüpfung $(R_2|\vec{t}_2)(R_1|\vec{t}_1) = (R_2R_1|R_2\vec{t}_1 + \vec{t}_2)$.

(a) Zeigen Sie dass Translationen $\mathcal{T}(V) := \{(\mathrm{id}_V|\vec{t}) \text{ wobei } \vec{t} \in V\}$ und Drehspiegelungen $\mathcal{R}(V) := \{(R|\vec{o}) \text{ wobei } R \in O(3)\}$ Untergruppen der $\mathcal{E}(V)$.
Bemerkung: Die $\mathcal{E}$ ist die *Raumgruppe* des Euklidischen Raumes (wer hätte das gedacht …). Die $\mathcal{R}$ kommt mit mindestens einem Fixpunkt; sie definiert die **Punktgruppe** des Euklidischen Raumes (weil halt mindestens ein Punkt fix).

---

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft …

[2] Zur Erinnerung: eine Äquivalenzrelation ist (i) reflexiv, $a \sim a$, (ii) symmetrisch, $a \sim b \Rightarrow b \sim a$, (iii) transitiv, $a \sim b \text{und} b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

Die Euklidische Gruppe schränken wir nun ein auf diejenigen Bewegungen, die einen bestimmten starren Körper invariant lassen, genauer:

Wir betrachten einen Festkörper Γ aus N verschiedenen Atomsorten. Den können wir beschreiben als Tupel $\Gamma = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N)$ von Punktmengen, wobei Γ_j genau die Orte der Atome der Sorte j enthält. Als *Raumgruppe* $S(\Gamma)$ dieses Festkörpers bezeichnet man diejenigen Euklidischen Isometrien, die alle Punktmengen auf sich selbst abbilden (also: jedes blaue Atom auf ein blaues Atom, jedes rote Atom auf ein rotes Atom, ...):

$$S(\Gamma) := \{g \in \mathcal{E}(V) \text{ wobei } g(\Gamma_1) = \Gamma_1, \ldots, g(\Gamma_N) = \Gamma_N\} \tag{2}$$

Wichtige Untergruppen von $S(\Gamma)$ sind die *Punktgruppe* von Γ,

$$P(\Gamma) := \mathcal{R}(V) \cap S(\Gamma) \tag{3}$$

und die *Translationsgruppe* von Γ

$$T(\Gamma) := \mathcal{T}(V) \cap S(\Gamma)\,. \tag{4}$$

(a) Zeigen Sie: $T(\Gamma)$ ist Normalteiler von $S(\Gamma)$. Apropos: Eine Untergruppe H von G definiert einen Normalteiler (engl normal subgroup), auch genannt invariante Untergruppe (engl. invariant subgroup), sofern $\forall h \in H\ \forall g \in G : ghg^{-1} \in H$.

(b) Gilt stets $S(\Gamma)/T(\Gamma) \cong P(\Gamma)$? Apropos: Für eine Gruppe G mit Normalteiler H bildet die Menge der sog. linken Nebenklassen $\{pH | p \in G\}$ mit Verknüpfung $pH \circ qH = (p \cdot g)H$ eine Gruppe, genannt die Faktorgruppe (engl. factor group), zuweilen genannt Quotientengruppe (engl. quotient group), notiert G/H.

(c) $\Gamma = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N)$ heißt *Kristall*, wenn es drei linear unabhängige Vektoren $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3 \in V$ gibt, so dass $(\hat{1}|\vec{t}_k) \in S(\Gamma)$ für $k = 1, 2, 3$.

Zeigen Sie: es gibt drei (nicht eindeutig bestimmte) Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in V$, so dass

$$T(\Gamma) = \{(\hat{1}|\vec{a}_j n^j) \text{ wobei } n^1, n^2, n^3 \in \mathbb{Z}\}\,. \tag{5}$$

(Die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ heißen *primitive Gittervektoren* des Kristalls. Der Orbit $T(\Gamma)(0)$ des Ursprungs unter der Translationsgruppe $T(\Gamma)$ heißt auch das *Bravais-Gitter* des Kristalls.)

▷ **Aufgabe 3 (Symmetrische Gruppen)** (π Punkte)

Die Gruppe der Bijektionen eines Anfangsstücks $\{1, 2, 3, \ldots, N\}$ der natürlichen Zahlen auf sich selbst nennt man die **symmetrische Gruppe** vom Grad N, bezeichnet S_N; ihre Elemente heißen *Permutationen*. Die S_N operiert in natürlicher Weise auf den Zahlen $1 \ldots, N$, oder auch auf jeder beliebigen Menge von N Dingen, die man von 1 bis N numeriert hat.

Unter einem *k-Zykel* versteht man eine Permutation $\sigma \in S_N$, die k Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \{1, 2, \ldots, N\}$ zyklisch vertauscht,

$$\sigma(n_1) = n_2\,, \quad \sigma(n_2) = n_3\,, \quad \ldots, \sigma(n_k) = n_1\,, \tag{6}$$

und alle anderen Zahlen unverändert lässt.

(a) Zeigen Sie: jede Permutation $\sigma \in S_N$ kann man in eindeutiger Weise (bis auf Reihenfolge) in ein Produkt disjunkter Zykel zerlegen.

Für eine Permutation σ definiert man als eine Art Fingerabdruck den *Zykeltyp* (σ), der die Längen und Anzahlen der Zykel angibt, in die σ zerlegt werden kann; Beispiel: Die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 6 & 1 & 3 & 5 & 2 & 9 & 4 & 7 \end{pmatrix} \tag{7}$$

zerfällt in die Zykel

$$\sigma = (1843)\,(26)\,(79)\,(5) \tag{8}$$

und hat den Zykeltyp

$$(\sigma) = (4)^1\,(2)^2\,(1)^1\,, \tag{9}$$

also: σ besteht aus einem 4-Zykel, zwei 2-Zykeln und einem 1-Zykel.

(a) Zeigen Sie: die Zykelklassen (= Permutationen gleichen Zykeltyps) sind gerade die Konjugationsklassen von S_N.

(b) Ein gutes Beispiel für eine Realisierung der Gruppenoperation "Konjugation" in Hardware ist die im zweiten Weltkrieg benutzte Chiffriermaschine *Enigma*: Diese Maschine permutiert die 26 Buchstaben von A bis Z; abhängig von einem geheimen Schlüssel kann eine sehr große Anzahl verschiedener Permutationen realisiert werden, und ein Walzenmechanismus sorgt dafür, dass für jedes Zeichen einer Nachricht eine andere Permutation benutzt wird.

Dieser Walzenmechanismus hat eine Besonderheit: er wird zweimal durchlaufen, was vom Konstrukteur als tolles Feature gepriesen wurde — ein Auszug aus der Patentschrift: *"Durch diesen Rückgang des Stromes durch den Chiffrierwalzensatz findet eine weitere Verwürfelung statt. Infolge dieser Anordnung ist es möglich, mit verhältnismäßig wenig Chiffrierwalzen auszukommen und trotzdem eine große Chiffriersicherheit aufrechtzuerhalten."*

Tatsächlich aber ist diese vermeintlich geniale Konstruktion ein Kardinalfehler der Enigma und hatte weitreichende Konsequenzen; eine mathematische Konsequenz ist: alle durch Enigma realisierbaren Permutationen liegen in derselben Konjugationsklasse von S_{26}, haben also denselben Zykeltyp, und noch dazu einen sehr simplen. Welchen?

Der Fachschaftsrat MaPhy bittet um Kenntnisnahme:

- Im-Mai-Grillen—2.5.—19 Uhr—Innenhof 2.28.
- LAN-Party—3.6.—17 Uhr—2.28.0.102/104
- MaPhy-Sportfest—Juni—Sportplatz am Neuen Palais