Mathematische Bissen
- Gruppentheorie für PhysikerInnen -

Übungsblatt 3 ($20 + \pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 20.05.16 – Abgabe 02.06.16 – Besprechung 03.06.16

▷ **Aufgabe 1 (Tensordarstellung der $SO(2)$)** (10 Punkte)

Wir betrachten eine sog *Tensordarstellung* der $SO(2)$. Es seien v^1, v^2 und u^1, u^2 die Komponenten zweier Vektoren im $\mathbb{R}^2$. Unter einer Drehung $\mathcal{R}$ transformieren sich die Komponenten $v'^i = R^i{}_j v^j$, parametrisiert $R^1{}_1 = R^2{}_2 \equiv c = \cos\varphi$, $R^2{}_1 = -R^1{}_2 \equiv s = \sin\varphi$. Demzufolge transformieren sich die Tensorkomponenten

$$u'^i v'^j = R^i{}_k R^j{}_l u^k v^l \tag{1}$$

Die $u^i v^j$ sind 4 Zahlen, die in Form eines Spaltenvektors angeordnet werden können, $(u^1v^1, u^1v^2, u^2v^1, u^2v^2)^T$. Entsprechend sind die $R^i{}_k R^j{}_l$ insgesamt 16 Zahlen, die in Form einer 4×4-Matrix geschrieben werden können, und aus (1) wird

$$\begin{pmatrix} u'^1v'^1 \\ u'^1v'^2 \\ u'^2v'^1 \\ u'^2v'^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c^2 & -cs & -cs & s^2 \\ cs & c^2 & -s^2 & -cs \\ cs & -s^2 & c^2 & -cs \\ s^2 & cs & cs & c^2 \end{pmatrix}}_{:=\underline{M}} \begin{pmatrix} u^1v^1 \\ u^1v^2 \\ u^2v^1 \\ u^2v^2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

(a) Bestätigen Sier, dass die Menge der 4×4-Matrizen (2) eine 4-dimensionale Darstellung der $SO(2)$ vermittelt.[2]

Diese Darstellung ist allerdings reduzibel. Wir wissen ja schon, dass sowohl das Skalarprodukt $u^1v^1 + u^2v^2$ wie auch die Fläche $u^1v^2 - u^2v^1$ unter Drehungen invariant ist. Wir erwarten also, dass bei geeigneter Wahl der Basis die 4×4-Matrix Block-diagonal wird mit zwei 1×1-Blöcken, und einem nicht weiter reduziblen 2×2-Block.

(b) Konstruieren Sie eine 4×4-Matrix, nennen wir sie $\underline{A}$, so dass $\underline{AMA}^{-1}$ blockdiagonal. Bestätigen Sie, dass bis auf Ähnlichkeit

$$\underline{AMA}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2\varphi) & -\sin(2\varphi) \\ 0 & 0 & \sin(2\varphi) & \cos(2\varphi) \end{pmatrix} \tag{3}$$

Die hier gefunden Blockstruktur schreibt man $2 \otimes 2 = 1 \oplus 1 \oplus 2$, also "diese 4-dimensionale Darstellung ist direkte Summe zweier 1-dimensionaler Darstellungen und einer 2-dimensionalen Darstellung".

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

[2] Nicht "die" sondern "eine" – es gibt nämlich noch mehr; können Sie sie auflisten?

Anmerkung: Wir werden später sehen, dass die unitäre Darstellung der $SO(3)$ auf dem Hilbertraum (unendlich-dimensionale Darstellung!) vollständig reduzibel ist. Für spinlose Teilchen

$$\hat{U}(R) = \begin{pmatrix} D^{(0)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & D^{(1)}_{11} & D^{(1)}_{12} & D^{(1)}_{13} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & D^{(1)}_{21} & D^{(1)}_{22} & D^{(1)}_{23} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & D^{(1)}_{31} & D^{(1)}_{32} & D^{(1)}_{33} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D^{(2)}_{11} & D^{(2)}_{12} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D^{(2)}_{21} & D^{(2)}_{22} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{4}$$

wobei $D^{(l)}_{ij}, i, j = 1, \ldots, 2l+1$, die Matrixelemente einer $(2l+1)$-dimensionalen Darstellung auf $\mathcal{L}(\{|l,m\rangle, m = -l, \ldots, l\})$.[3]

▷ **Aufgabe 2 (Liegruppe – ein nützliches Beispiel)** (10 Punkte)

Sei die Welt ein-dimensional. Die Kombination einer Verschiebung und Skalierung von Dingen in der Welt kann beschrieben werden durch die Punkttransformation

$$T_{\lambda,\alpha}: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{5}$$

$$x \mapsto x' = \lambda x + \alpha \tag{6}$$

lies "ein Punkt mit Koordinate x vor der Transformation hat die Koordinate $x' = \lambda x + \alpha$ nach der Transformation".

(a) Zeigen Sie: Die Menge $T := \{T_{\lambda,\alpha} | \lambda, \alpha \in \mathbb{R}\}$ mit Verknüpfung "Hintereinanderausführung" und neutralem Element $T_{1,0}$ bilden eine Gruppe.

(b) Führen Sie die Abkürzung $a = (\lambda, \alpha)$ ein. Wie lautet die Verknüpfung $c = (\phi_1(a,b), \phi_2(a,b))$ in $T_b T_a = T_c$?

(c) Lässt sich jedes T_a von $T_{1,0}$ ausgehend mit einer stetig differenzierbaren Kurve erreichen?

(d) Zeigen Sie: Die Abbildung

$$f: \quad T \to GL(2, \mathbb{R}) \tag{7}$$

$$T_{\lambda,\alpha} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

liefert eine treue Darstellung der Gruppe. Ist das eine lineare Darstellung? Wenn ja – welcher Dimension? Reduzibel? Gar vollständig reduzibel?

(e) Betrachte die folgenden beiden Parametrisierungen der Gruppe,

$$g(s,t) := \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad s, t \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

$$h(u,v) := \begin{pmatrix} 1 + \frac{u \cos v}{2} & \frac{u \sin v}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad 0 \le u, 0 \le v \le 2\pi. \tag{10}$$

[3] $\mathcal{L}$ bezeichnet die lineare Hülle, also die Menge der Linerakombinationen.

Welche dieser beiden Parametrisierungen ist kanonisch? Zur Erinnerung: Parameter a, b in Parametrisierung $k(a, b)$ kanonisch heißt insbesondere (i) $k(0, 0) = e$, und (ii) $k(a, 0)$ Abelsche Untergruppe, $k(0, b)$ Abelsche Untergruppe.

(f) Bestimmen Sie die Lie-Algebra unserer Gruppe. Liefert Ihnen die Exponentialfunktion der Elemente der Lie-Algebra alle Gruppenelemente?

(g) Zeigen Sie: Die Algebra der Differential-Operatoren $x\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dx}$ ist isomorph der Algebra aus (f). Was bewirkt der Operator $\exp\{sx\frac{d}{dx} + t\frac{d}{dx}\}$ wenn er auf Funktionen $\psi(x)$ losgelassen wird?