# Theoretische Physik III
# - Quantenmechanik (SoSe 2016) -

Übungsblatt 02 ($20 + \pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 18.04.16 – Abgabe 26.04.16 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

---

### ▷ Aufgabe 1 (Zerfließen freier Wellenpakete)* (12 Punkte)

Die Aufgabe sieht jetzt etwas länglich aus – ist es aber nicht. Im wesenstlichen muss man sich mit Gaussfunktionen beschäftigen. Ähnliches mathematisches Handwerkzeug kommt übrigens auch bei der Beschreibung eines Gauss'schen Lichtstrahls zum Einsatz ...

Ein Punktteilchen im $\mathbb{R}^1$ sei zum Zeitpunk $t = 0$ in einem Zustand präpariert, der durch die Ortswellenfunktion

$$\Psi(x, t = 0) = \frac{1}{[2\pi\sigma_0^2]^{1/4}} e^{-(x-x_0)^2/[4\sigma_0^2]+ik_0x} \tag{1}$$

beschrieben wird.

(a) Skizzieren Sie die W'keitsdichte $|\Psi(x, t = 0)|^2$. Welche Bedeutung haben die Parameter $x_0$ und $\sigma_0$? Lässt sich aus Ihrer Skizze die Bedeutung des Parameters $k_0$ entnehmen?

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Ortsobservable $\hat{q}$ und bestätigen

$$\langle \hat{q} \rangle_{\Psi(0)} = x_0 \,, \quad \langle \hat{q}^2 \rangle_{\Psi(0)} - \langle \hat{q} \rangle^2_{\Psi(0)} = \sigma_0^2 \Rightarrow \delta_{\Psi(0)}(q) = \sigma_0 \,. \tag{2}$$

(c) Um Aussagen über die Verteilung der Messwerte bei einer Impulsmessung zu erhalten, empfiehlt es sich, zunächst die Fouriertransformierte $\tilde{\Psi}(k, t = 0) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \Psi(x, t = 0) e^{-ikx} dx$ zu berechnen. Bestätigen Sie

$$\tilde{\Psi}(k, t = 0) = \left[ \frac{2\sigma_0^2}{\pi} \right]^{\frac{1}{4}} e^{-\sigma_0^2(k-k_0)^2 - i(k-k_0)x_0} \tag{3}$$

und halten fest: Die Fouriertransformierte einer Gaußfunktion ist eine Gaußfunktion

(d) Skizzieren Sie die W'keitsdichte $|\tilde{\Psi}(k, t = 0)|^2$. Welche Bedeutung hat $k_0$? Bestätigen Sie die Momente der Impulsverteilung

$$\langle \hat{p} \rangle = \hbar k_0 \,, \quad \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{4\sigma_0^2} \Rightarrow \delta_{\Psi(0)}(p) = \frac{\hbar}{2\sigma_0} \,. \tag{4}$$

Was ist das Produkt aus Orts- und Impulsunschärfe im Zustand $\Psi(t = 0)$?

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

(e) Um die zeitliche Entwicklung des Wellenpakets zu studieren sei an $\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{\Psi}(k, t = 0) e^{-i\omega(k)t} e^{ikx} dk$ mit $\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$ erinnert. Im verbleibende Integral ist der Integrand wiederum vom Gaußschen Typ, das Integral kann daher mittels quadratischer Ergänzung leicht ausgeführt werden. Bestätigen Sie

$$\Psi(x,t) = \mathcal{N}(t) \exp\left\{ -\frac{1 - it\delta_0/\sigma_0}{4\sigma^2(t)} [x - x_0 - v_0 t]^2 + ik_0 x - i\frac{\hbar k_0^2}{2m} t \right\} , \tag{5}$$

wobei

$$v_0 := \frac{\hbar k_0}{m} , \tag{6}$$

und

$$\sigma(t) = \sqrt{\sigma_0^2 + \delta_0^2 t^2} , \tag{7}$$

mit $\delta_0 \equiv \delta_\Psi(p)/m = \hbar/(2m\sigma_0)$. Beschreiben Sie – in eigenen Worten – die zeitliche Entwicklung des Gauss'schen Wellenpaketes. Vielleicht machen Sie sich eine Skizze von $\sigma(t)$ und diskutieren die Regimes “kleine Zeiten” vs. “große Zeiten” (klein/groß gegen *was*?).

▷ **Aufgabe 2 (Teilchen in der Kiste)**$^*$ (8 Punkte)

Ein Teilchen sei in einer würfelförmigen Kiste der Kantenlänge $L$ frei beweglich eingeschlossen.

(a) Bestimmen Sie die Energieniveaus und Eigenfunktionen. Zeigen Sie, daß die Energie-Eigenwerte (Energieniveaus) durch die Gleichung

$$E_{klm} = \epsilon \left( (l+1)^2 + (m+1)^2 + (n+1)^2 \right) , \qquad l, m, n = 0, 1, 2, \dots , \tag{10}$$

mit $\epsilon = \hbar^2\pi^2/(2mL^2)$ gegeben sind, und die dazugehörigen Energie-Eigenfunktionen

$$\varphi_{klm}(x,y,z) = \left[\frac{2}{L}\right]^{\frac{3}{2}} \sin(k_l x) \sin(k_m y) \sin(k_n z) , \qquad k_l = \frac{(l+1)\pi}{L} \text{ etc} , \tag{11}$$

wobei die Kiste mit der unteren Ecke links vorne im Koordinatenursprung plaziert.

(b) Welchen Druck übt das Teilchen im Grundzustand auf die Wände aus?
Zur Erinnerung: “Druck” ist “Kraft pro Fläche”. “Kraft” ist “Arbeit pro Wegstrecke”, und “Arbeit” ist sowas wie Energie. Bestimmen Sie also zunächst die Änderung der Grundzustandsenergie bei infinitesimaler Verschiebung einer der Wände.

(c) Wie groß dürfte $\hbar$ allenfalls sein, um beim Öffnen handelsüblicher Melonen durch umherfliegende Melonenkerne nicht in Lebensgefahr zu geraten? Als theoretische Physikerin dürfen Sie annehmen, dass handelsübliche Melonen würfelförmig sind – was sie ja auch sind, vgl. Abbildung.

(d) Überzeugen Sie sich davon, dass (i) die Energie-Niveaus um so dichter beieinander liegen, je größer die Kiste ist, und (ii) je höher die Energie, desto mehr Niveaus befinden sich in ihrer Nachbarschaft. Man sagt, im Grenzfall $L \to \infty$ entstehe ein quasi-kontinuierliches Energiespektrum. Bestimmen Sie für diesen Fall die Zustandsdichte, d.h. die Zahl der Niveaus, deren Energie im Energie-Intervall $dE$ um $E$ liegt.

▷ **Aufgabe 3 (Quantendiffusion)** ($\pi$ Punkte)

Ihr Freund ist besorgt. Er schläft in einem Hochbett und befürchtet, aufgrund der Quantendiffusion (Zerfließen seines Wellenpaketes) morgens auf dem Boden aufzuwachen (möglicherweise, so seine konkrete Befürchtung, mit blauen Flecken).

(a) Versuchen Sie, Ihren Freund zu beruhigen.
Hinweis: Modellieren Sie Ihren Freund als Gauss'sches Wellenpaket. Benuzen Sie die Relation $m\Delta v^2/2 \sim k_\mathrm{B}T$, die Sie in der statistischen Mechanik kennenlernen werden, um die anfängliche Geschwindigkeits-Unschärfe Ihres Freundes der Masse $m$ mit seiner Körpertemperatur $T$ in Beziehung zu setzen ($k_\mathrm{B}$ ist die Boltzmann-Konstante).

(b) Wie lange müsste Ihr Freund gewohnheitsmäßig schlafen, um im Mittel jedes zweite mal neben seinem Bett aufzuwachen?

(c) Geben Sie eine Einschätzung ob die unter (b) gefundene Antwort realistisch erscheint. Begründen Sie Ihre Einschätzung. Sollten Sie zum Schluss kommen "unrealistisch" – woran könnte das liegen, also: an welcher Stelle ist das Modell inadäquat?