Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2016) -

Übungsblatt 03 ($10 + \pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 25.04.16 – Abgabe 03.05.16 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1 (Ein kleiner Satz) (2 Punkte)

Sei $\hat{T}$ linearer Operator in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, und $\hat{T}^\dagger$ der zu $\hat{T}$ adjungierte Operator. Beweisen Sie die nützliche Ungleichung

$$\langle \hat{T}^\dagger \hat{T} \rangle \geq 0 \,. \tag{1}$$

▷ Aufgabe 2 (Unschärferelationen) (4 Punkte)

Sie erinnern sich an die Varianz (Unschärfe) einer Observable, $\delta A := [\langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle]^{1/2}$. Seien nun $\hat{A}$, $\hat{B}$ zwei selbstadjungierte Operatoren mit Kommutator

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C} \,. \tag{2}$$

Beweisen Sie die folgend wichtige Ungleichung für das Produkt der Varianzen

$$\delta A \delta B \geq \frac{1}{2} |\langle \hat{C} \rangle| \,. \tag{3}$$

<u>Hinweis:</u> Machen Sie von Aufgabe 1 Gebrauch. Setzen Sie dort $\hat{T} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle + i\lambda(\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle)$ und minimieren bezüglich λ.

▷ Aufgabe 3 (Zustand minimaler Unschärfe) (4 Punkte)

Für ein Punktteilchen im $\mathbb{R}$ mit kanonischem Kommutator $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ wird aus Aufgabe 2 die *Heisenberg'sche Unschärferelation*,

$$\delta q \delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{4}$$

Ein Zustand bei dem hier Gleichheit herrscht heißt *Zustand minimaler Unschärfe* (engl: minimum uncertainty state). Zeigen Sie, daß der allgemeinste Zustand minimaler Unschärfe in der Ortsdarstellung durch eine Gaussfunktion beschrieben wird.

<u>Hinweis:</u> Betrachte Beweis zu Aufgabe 2. Setze o.B.d.A. $\langle \hat{q} \rangle = \langle \hat{p} \rangle = 0$; minimal heißt dann neben $\lambda = \hbar/(2\delta p^2)$ auch $\langle \hat{T}^\dagger \hat{T} \rangle) = 0$, also $\hat{T}\psi_{\min} = 0$. Auswertung dieser Gleichung in Ortsdarstellung liefert den gesuchten Beweis.

---

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

▷ **Aufgabe 4 (Ankunftszeit)** (π Punkte)

Für ein Teilchen mit einem räumlichen Freiheitsgrad (Ort q, Impuls p) vermittelt die Phasenraumfunktion

$$T(q,p) := -\frac{mq}{p} \tag{5}$$

die sog *Ankunfstzeit* des freien Teilchens im Ursprung $x = 0$. Begründen Sie die Taufe.

Erinnern Sie sich jetzt bitte an das Korrespondenzprinzip um einen Operator "Ankunftszeit"

$$\hat{T} := -m\hat{p}^{-1/2}\hat{q}\hat{p}^{-1/2} \tag{6}$$

für die Quantenmechanik zu verabreden.

(a) Ist dieser Operator auf einem geeignet gewählten Definitionsbereich $\mathcal{D}_T \subseteq \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, dx)$ symmetrisch? Gar selbstadjungiert? Wo gibt es Probleme?

(b) Was wären die verallgemeinerten Eigenfunktionen bzw Eigenwerte?

Hinweis: Vielleicht arbeiten Sie in der Impulsdarstellung ...

Ein Theorem von Pauli besagt, dass es für Hamiltonoperatoren $\hat{H}$, die nach unten beschränkt sind, es keinen selbstadjungierten Operator "Zeit" $\hat{t}$ gibt mit $[\hat{H}, \hat{t}] = i\hbar$. Die legendäre "Energie-Zeit" Unschärferelation (im Lehrbuch nachschlagen) lässt sich demzufolge nicht im Sinne der Heisenbergschen Unfschärferelation verstehen ...

(c) Berechnen Sie nun den Kommutator $[\hat{H}, \hat{T}]$ für freie Teilchen $\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2$. Konfrontieren Sie Ihr Resultat mit Paulis Theorem. Nun noch mal die Frage: ist $\hat{T}$ selbstadjungiert?

Bemerkung: Diese Aufgabe dient der Bildung. "Zeit" – im Gegensatz zu "Ort" ist grundsätzlich *keine* Observable, keine Messgrösse. Ein Teilchen befindet sich möglicherweise an einem Ort (relativ zu anderen Teilchen), und hat möglicherweise Impuls, Energie, Drehimpuls oder Spin, aber es hat halt keine "Zeit". Wenn Sie auf die Uhr schauen messen Sie nicht "die Zeit", sondern die Position des Zeigers. Und wenn Sie noch mal hinschauen, und der Zeiger steht woanders, dürfen Sie aus der Differenz der Positionen auf eine Dauer schließen – nicht auf "Zeit". Vgl auch mein Editorial zu "Portal Wissen: Zeit" (Universität Potsdam 2014).

Der Fachschaftsrat MaPhy bittet um Kenntnisnahme:

- Im-Mai-Grillen—2.5.—19 Uhr—Innenhof 2.28.
- LAN-Party—3.6.—17 Uhr—2.28.0.102/104
- MaPhy-Sportfest—Juni—Sportplatz am Neuen Palais