Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2016) -

Übungsblatt 04 ($20 + e + \pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 02.05.16 – Abgabe 10.05.16 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ **Aufgabe 1 (Teilchen auf dem Kreis I)*** ($4 + e$ Punkte)

Wir betrachten ein freies Teilchen in einer räumlichen Dimension – nur dass diese Dimension zu einem Kreis mit Umfang a aufgewickelt ist. Die verallgemeinerte Koordinate ist periodisch mit Periodenintervall $[0, a]$. Mit m die Masse des Teilchens lautet die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2m} \tag{1}$$

Bevor Sie loslegen ist es vielleicht ganz nützlich einmal die klassischen Bewegungsgleichungen aufzustellen und für allgemeinen Anfangsbedingungen zu lösen (man beachte die Periodizität der Koordinate q).

Die quantisierte Version unseres Systems erhält man in der sog "kanonischen Weise". Der Ortsoperator $\hat{q}$, erklärt $(\hat{q}\psi)(x) = x\psi(x)$, und Impulsoperator $\hat{p}$, erklärt $(\hat{p}\psi)(x) = \frac{\hbar}{i}\psi'(x)$, bilden ein konjugiertes Paar mit Heisenbergkommutator

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar\,. \tag{2}$$

Der Hilbertraum unseres Systems ist der Raum der quadratintegrablen Funktionen über dem Periodenintervall $[0, a]$, also $\mathcal{H} = \{\psi \in \mathcal{L}^2([0, a], dx) | \psi(0) = \psi(a)\}$. Hamiltonoperator wie in (1) nur halt H und p mit Hut auf dem Kopf.

(a) Zeigen Sie: Die stationäre Schrödingergleichung $\hat{H}\psi = E\psi$ auf $\mathcal{H}$ wird gelöst

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}\,, \qquad \varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{ik_n x} \tag{3}$$

worin k_n Wellenzahl

$$k_n = \frac{2\pi}{a} n\,, \qquad n = 0, \pm 1, \dots\,. \tag{4}$$

(b) Die φ_n bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$, also

$$\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = \delta_{mn}\,, \tag{5}$$

$$\forall_{\psi \in \mathcal{H}} \|\psi\|^2 = \sum_n |\langle \varphi_n, \psi \rangle|^2\,. \tag{6}$$

Hinweis: Hier dürfen Sie ruhig Ihr Mathe-Skript, Stichwort Fourierreihen, zu Rate ziehen.

(c) Der Impulsoperator hat Eigenwerte und Eigenvektoren. Welche sind das?

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

(d) Auf ganz $\mathcal{H}$ ist der Impuloperator sicherlich nicht beschränkt (Beweis?), nach einem Satz der Funktionalanalyis daher auch nicht stetig, und das sogar nirgends. Klingt furchtbar, ist aber nicht so schlimm. Viel wichtiger ist, ob sich eine in $\mathcal{H}$ dicht liegende Menge von Funktionen finden lässt, auf der der Impulsoperator selbstadjungiert ist. Zeigen Sie, dass das der Fall ist, und charakterisieren Sie diese Menge. (e Punkte)

▷ Aufgabe 2 (Teilchen auf dem Kreis II)* (3 Punkte)

Das Teilchen aus Aufgabe (2) sei nun zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand

$$\Psi(x, t = 0) = \alpha\varphi_0(x) + \beta\varphi_1(x) + \gamma\varphi_{-1}(x) \tag{7}$$

präpariert, wobei $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$. Ist Ψ korrekt normiert?

(a) Welche Bedeutung haben die Koeffizienten α, β, γ?
Hinweis: Denken Sie an eine Energie-, eine Impuls- und eine Orts-Messung. Füllen Sie die Lücken in den Sätzen: 1. “Mit der W'keit [Lücke] wird der Werte [Lücke] an einem Energiemessgerät abgelesen”; 2. “Mit der W'keit [Lücke] wird der Wert [Lücke] an einem Impulsmessgerät abgelesen”; 3. “Mit der W'keit [Lücke] wird der Wert [Lücke] an einem Ortsmessgerät, das nach Anwesenheit in dx bei x_0 fragt, abgelesen”.

Folgend der Präparation im Zustand wie unter Gl. (7) beschrieben, entwickelt sich der Zustand gemäß der Schrödingergleichung $i\hbar\dot{\Psi} = \hat{H}\Psi$. Zum Zeitpunkt $t = T$ werde nun eine Messung ausgeführt.

(b) Füllen Sie die Lücken in den unter (a) Hinweise gegebenen Sätzen. Bei welcher Messung hängen die Resultate offensichtlich nicht vom Zeitpunkt T ab? Warum nicht?

▷ Aufgabe 3 (Rechenregeln Operatoren) (5 Punkte)

Bestätigen Sie die folgenden Rechenregeln für Operatoren. Fragen nach Definitionsbereichen dürfen Sie im ersten Anlauf non-chalant ignorieren ....

$$(\alpha\hat{A})^\dagger = \alpha^*\hat{A}^\dagger \tag{8}$$

$$(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger \tag{9}$$

$$[\hat{A}, \hat{B}]^\dagger = [\hat{B}^\dagger, \hat{A}^\dagger] \tag{10}$$

$$(\hat{A}\hat{B})^{-1} = \hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1} \tag{11}$$

$$(\hat{A}^\dagger)^{-1} = (\hat{A}^{-1})^\dagger \tag{12}$$

Bermerkung: Die Aufgabe ist zwar nicht klausurisomorph, aber diese Rechenregeln werden dauernd gebraucht und es ist dringend angeraten, sie mal selbst zu beweisen ...

▷ Aufgabe 4 (Initiationsritus Quantenmechanik) (3 Punkte)

Seit Menschengedenken werden Studierende der Grundlagen der Quantenmechanik gebeten, zu beweisen:

(a) Im unitären Raum gilt die sog *Schwarz'sche Ungleichung*[2]

$$|\langle\psi,\chi\rangle| \leq \|\psi\|\|\chi\|\,, \tag{13}$$

(b) die sog *Parallelogramm-Gleichung*

$$\|\psi+\chi\|^2 + \|\psi-\chi\|^2 = 2\|\psi\|^2 + 2\|\chi\|^2\,. \tag{14}$$

(c) und das Skalarprodukt kann durch die Norm ausgedrückt werden,

$$4\langle\psi,\chi\rangle = \|\psi+\chi\|^2 - \|\psi-\chi\|^2 + i\|i\psi+\chi\|^2 - i\|i\psi-\chi\|^2\,. \tag{15}$$

▷ **Aufgabe 5 (Qubit)** (5 Punkte)

Das "Bit" ist bekanntlich das Elementarteilchen der Informatik: Sein Konfigurationsraum umfasst nur die beiden Zustände "gesetzt" (symbolisch 1) und "ungesetzt" (symbolisch 0). Wird das Bit quantisiert, erhält man das Elementarteilchen der Quanteninformatik, genannt "Qubit".

Der Hilbertraum des Qubit ist zweidimensional – das Qubit ist gewissermaßen das kleinste nicht-triviale quantemechanische System. Physikalisch realisieren lassen sich Qubits durch den Spin eines Elektrons, den Polarisationsfreiheitsgrad eines Photons, oder zwei Energieniveaus eins Atoms.

Die klassischen Zustände 1 und 0 werden im Qubit-Hilbertraum $\mathcal{H}_{\text{qubit}}$ durch die beiden orthonormalen Basisvektoren $|\mathtt{1}\rangle$ und $|\mathtt{0}\rangle$ dargestellt, genannt die "Computer-Basis". Gemäß Superpositionsprinzip ist aber auch die Superposition

$$|\psi\rangle = \psi_0|\mathtt{0}\rangle + \psi_1|\mathtt{1}\rangle\,, \tag{16}$$

ein möglicher Zustand des Qubit. Die Koeffizienten $\psi_i \in \mathbb{C}$ bilden die Darstellung in der Computer-Basis,

$$\psi_i = \langle i|\psi\rangle\,, \tag{17}$$

und werden folgendermaßen interpretiert:

$$|\psi_i|^2 = \text{W'keit, das Qubit gesetzt } (i=\mathtt{1}) \text{ bzw ungesetzt } (i=\mathtt{0}) \text{ zu finden} \tag{18}$$

Um sich das Leben (und Schreiben) etwas zu erleichtern, werden Qubits gerne in einer Matrixdarstellung beschrieben. Die Darstellung ist definiert durch eine Abbildung $\mathcal{H}_{\text{qubit}} \to \mathbb{C}^2$

$$|\mathtt{0}\rangle \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\mathtt{1}\rangle \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Die Manipulation eines Bits wird in der Informatik durch Gatter erreicht. Ein Gatter, das als Input ein Bit nimmt, und als Output wiederum ein Bit liefert, heißt unäres Gatter. Mathematisch formuliert ist ein unäres Gatter eine Abbildung

$$g : \{\mathtt{0},\mathtt{1}\} \quad \to \quad \{\mathtt{0},\mathtt{1}\} \tag{20}$$

[2] Für den "technischen Jargon" vgl. die Handreichung zu Hilberträumen, Operatoren etc. auf der Netzseite des Kurses ...

(a) Zeigen Sie: es gibt genau 4 unäre Gatter.

(b) Zeigen Sie: Die einzigen reversiblen Gatter sind die Identität (hier bezeichnet IDT) und das logische NOT. Ein reversibles Gatter ist ein Gatter, bei dem Sie bei Kenntnis des Output auf den Input schließen können.

(c) Beweisen Sie den *Fundamentalsatz der Informatik*: Es gibt kein unäres Gatter $\sqrt{\mathrm{NOT}}$, das in Hintereinanderschaltung das NOT realisiert.

In der Quanteninformatik werden reversible unäre Gatter durch unitäre Operatoren dargestellt, und das Hintereinanderschalten von logischen Gattern entspricht der Multiplikation der zugeordneten Operatoren. In der Matrixdarstellung sind Gatter einfach unitäre 2×2-Matrizen. Hintereinanderschaltung ist also einfach Matrixmultiplikation.

(d) Zeigen Sie: Die Matrix

$$\hat{U}_{\mathrm{NOT}} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

ist unitär und realisiert das logische NOT für Qubits.

(e) Zeigen Sie: der Fundamentalsatz der Informatik wird mit Qubits außer Kraft gesetzt. Es gibt sehr wohl ein unäres Gatter $\hat{U}_{\sqrt{\mathrm{NOT}}}$, das in Hintereinanderschaltung das logische NOT realisiert, $\hat{U}_{\mathrm{NOT}} = \hat{U}_{\sqrt{\mathrm{NOT}}}\hat{U}_{\sqrt{\mathrm{NOT}}}$. Welche Matrix ist diesem Gatter zugeordnet?

Genießen Sie hier ruhig Ihren Erkenntnisvorsprung vor den Kollegen aus der Informatik. Und verbeugen sich in Demut vor der Einsicht: nicht alles, von dem man felsenfest überzeugt ist (weil man's so in der Uni gelernt hat) ist unter allen Umständen richtig. Werden Sie jetzt aber bloß nicht übermutig ...

▷ **Aufgabe 6 (Quantenhexerei)** (π Punkte)

Rechtzeitig zum Monatsfanfang Mai erreicht Sie eine SMS:

Take a friend, go to the bar, get a drink and play a game:

Place a coin head up in a box. Seal the box so that nobody can look inside. You will now take three turns, first you, then your friend, then you again. At each turn you (or your friend) can manipulate the coin in any desired manner, for example turn it around, or not turn it around. Of course neither you nor your friend can see the actual state of the coin (heads or tails up). Also, you can't see what action your friend takes (turn or not turn), nor can your friend see what action you take. Once you are done, you may open the box. You win if the coin is still head up in the end. Otherwise your friend wins.

(a) Convince your friend that there is no winning strategy for neither you nor your friend.

(b) Recall quantum mechanics (but don't tell your friend) and win the game – always!

Reference: D. Meyer, Phys. Rev. Lett. **82**, 1052.

Der Fachschaftsrat MaPhy bittet um Kenntnisnahme:

- Im-Mai-Grillen—2.5.—19 Uhr—Innenhof 2.28.
- LAN-Party—3.6.—17 Uhr—2.28.0.102/104
- MaPhy-Sportfest—Juni—Sportplatz am Neuen Palais