Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2016) -

Übungsblatt 06 (20 Punkte)

Ausgabe 13.05.16 – Abgabe 24.05.16 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ **Aufgabe 1 (Bahndrehimpuls)** (10 Punkte)

[diese Aufgabe ist nicht klausurisomorph, aber klausurrelevant ...]

Der Drehimpuls der Bahnbewegung ist eine wichtige Größe – denken Sie nur an die Vereinfachungen, die sich bei der Lösung des klassischen Keplerproblems aufgrund der Drehimpulserhaltung ergeben haben. Zeit also, sich den Drehimpuls näher anzusehen ...

Im Korrespondenzprinzip wird der kanonische Drehimpuls $\vec{\ell}(\vec{p},\vec{q}) = \vec{q}\times\vec{p}$ zum Drehimpulsoperator befördert,

$$\hat{\vec{\ell}} := \hat{\vec{q}} \times \hat{\vec{p}}. \tag{1}$$

(a) Für die kartesischen Komponenten (pedantisch: Koordinaten) $\hat{\ell}_i$, $i = x, y, z$ bestätige man durch einfaches Nachrechenen die wichtigen Vertauschungsrelationen,

$$\left[\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_y\right] \;=\; i\hbar\hat{\ell}_z\,, \qquad (xyz \text{ zyklisch})\,, \tag{2}$$

<u>Bemerkung:</u> Beim Nachrechnen hilfreich ist die Ortsdarstellung $\hat{\vec{\ell}} = \frac{\hbar}{i}\vec{x}\times\nabla$, in Komponenten (bitte bestätigen!)

$$\hat{\ell}_x \;=\; \hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\,, \tag{3}$$

$$\hat{\ell}_y \;=\; \hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\,, \tag{4}$$

$$\hat{\ell}_z \;=\; \hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\,, \tag{5}$$

aber die abstrakten Heisenbergkommutatoren $[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$ tuns natürlich auch.

(b) Zeigen Sie, dass die “Quadratlänge” des Drehimpulsvektors, $\hat{\vec{\ell}}^2 = \hat{\ell}_x^2 + \hat{\ell}_y^2 + \hat{\ell}_z^2$ selbstadjungiert, und mit jeder beliebigen kartesischen Komponenten $\hat{\ell}_i$ kommutiert,

$$\left[\hat{\vec{\ell}}^2, \hat{\ell}_i\right] = 0\,. \tag{6}$$

<u>Bemerkung:</u> Die Quadratlänge $\hat{\vec{\ell}}^2$ ist ein sog. Casimiroperator der Drehgruppe.

(c) Der Drehimpuls kommt insbesondere bei zentralsymmetrischen Problemen zum Einsatz, und da empfehlen sich bekanntlich Kugelkoordinaten,

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta\,, \qquad y = r\sin\varphi\sin\vartheta\,, \qquad z = r\cos\vartheta\,. \tag{7}$$

Zeigen Sie, dass in Kugelkoordinaten

$$\hat{\ell}_x = i\hbar\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \cot\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \tag{8}$$

$$\hat{\ell}_y = i\hbar\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \cot\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \tag{9}$$

$$\hat{\ell}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{10}$$

Für die Quadratlänge findet man nach ein wenig Fummelei

$$\hat{\vec{\ell}}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right], \tag{11}$$

kurz $\hat{\vec{\ell}}^2 = -\hbar^2\Delta_{S^2}$, mit Δ_{S^2} der Laplace-Operator auf der Oberfläche der Einheitskugel.

(d) Zeigen Sie, dass auch die drei sog. Spin-Matrizen

$$\hat{s}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

der Drehimpulsalgebra (2) genügen. Was haben die mit der Darstellung des Bahndrehimpulses auf dem Vektorraum(!) der Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell m}$ zur Quantenzahl $\ell = 1$ zu tun?

▷ **Aufgabe 2 (Erhaltungsgrößen im Zweikörperproblem)** (10 Punkte)

[auch diese Aufgabe ist nicht klausurisomorph, aber klausurrelevant ...]

Gegeben zwei Punktteilchen im physikalischen Raum, dem $\mathbb{R}^3$, deren kanonisch konjugierten Koordinaten(-Vektoren) und Impulse mit $\hat{\vec{q}}^{(i)}$, $\hat{\vec{p}}^{(i)}$, $i = 1, 2$ bezeichnet seien. Die fundamentalen Kommutatoren lauten

$$\left[\hat{q}_i^{(\alpha)}, \hat{p}_j^{(\beta)}\right] = i\hbar\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} \tag{13}$$

alle anderen Kommutatoren Null.

(a) In der Orstdarstellung für jedes der beiden Teilchen ist die quantenmechanische Wellenfunktion des zwei-Teilchen Systems zu jedem Zeitpunkt t eine komplexwertige Funktion von 6 Variablen, $\Psi(x^{(1)}, y^{(1)}, \ldots, z^{(2)})$. Welche physikalische Bedeutung hat diese Wellenfunktion im Bezug auf eine Ortsmessung der beiden Teilchen?

Beschränkt man sich auf konservative Wechselwirkung (kein Vektorpotential), und nimmt an, daß keine externen Kräfte wirken, lautet der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^{(1)2}}{2m^{(1)}} + \frac{\hat{\vec{p}}^{(2)2}}{2m^{(2)}} + V(|\hat{\vec{q}}^{(1)} - \hat{\vec{q}}^{(2)}|). \tag{14}$$

Die Funktion V bezeichnet hier das *Wechselwirkungspotential* der beiden Teilchen. Die ausschließliche Abhängigkeit des WW-Potentials vom Abstand der beiden Teilchen respektieren die Homogenität und Isotropie des Raumes und die Homogenität der Zeit.

(b) Homogenität des Raumes besagt, daß kein Raumpunkt ausgezeichnet ist. Mathematisch ist die Wechselwirkung invariant unter einer Verschiebung des Koordinatenursprungs, sie hängt nur von den Relativkoordinaten $\hat{\vec{q}}$ ab,

$$\hat{\vec{q}} := \hat{\vec{q}}^{(1)} - \hat{\vec{q}}^{(2)} \tag{15}$$

nicht aber von den Schwerpunktskoordinaten,

$$\hat{\vec{Q}} := \frac{m^{(1)}\hat{\vec{q}}^{(1)} + m^{(2)}\hat{\vec{q}}^{(2)}}{m^{(1)} + m^{(2)}} \tag{16}$$

Welche Erhaltungsgrößen sind mit dieser Invarianz verknüpft?

Hinweis: Denken Sie an alle Erhaltungsgrößen eines freien Teilchens. Bezeichnen Sie, falls er Ihnen über den Weg läuft,

$$\hat{\vec{P}} := \hat{\vec{p}}^{(1)} + \hat{\vec{p}}^{(2)} \tag{17}$$

den Gesamtimpuls (= Schwerpunktimpuls) des Zwei-Teilchensystems, und

$$\hat{\vec{\ell}}_{\mathrm{S}} := \hat{\vec{Q}} \times \hat{\vec{P}} \tag{18}$$

den Drehimpuls der Schwerpunktbewegung (*nicht* Gesamtdrehimpuls!).

(c) Zeigen Sie, dass

$$\hat{\vec{p}} = \frac{m^{(2)}\hat{\vec{p}}^{(1)} - m^{(1)}\hat{\vec{p}}^{(2)}}{m^{(1)} + m^{(2)}} \tag{19}$$

den zu $\hat{\vec{q}}$ kanonisch konjugierten Impuls der Relativbewegung bezeichnet. Ist die Transformation $\left\{\hat{\vec{q}}^{(1)}, \hat{\vec{p}}^{(1)}, \hat{\vec{q}}^{(2)}, \hat{\vec{p}}^{(2)}\right\} \to \left\{\hat{\vec{Q}}, \hat{\vec{P}}, \hat{\vec{q}}, \hat{\vec{p}}\right\}$ kanonisch?

(d) Zeigen Sie, dass der Gesamtdrehimpuls $\hat{\vec{L}} \equiv \hat{\vec{\ell}}^{(1)} + \hat{\vec{\ell}}^{(2)}$ sich in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten ausdrückt

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{Q}} \times \hat{\vec{P}} + \hat{\vec{q}} \times \hat{\vec{p}} \tag{20}$$

(e) Zeigen Sie, dass sich in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten der Hamiltonoperator ausdrückt (1 Punkt)

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{P}}^2}{2M} + \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + V(|\hat{\vec{q}}|)\,. \tag{21}$$

(f) Isotropie des Raumes besagt, daß keine Richtung im Raum ausgezeichnet ist. Mathematisch ist das WW-Potential daher invariant unter Drehungen des Radiusvektors $\hat{\vec{q}}$. Welche Erhaltungsgröße ist mit dieser Invarianz verknpft?

(g) Homogenität der Zeit besagt, daß kein Zeitpunkt ausgezeichnet ist. Mathematisch hängt das WW-Potential daher nicht explizit von der Zeit ab. Welche Erhaltungsgröße der Relativbewegung ist mit dieser Invarianz verknüpft?

(h) Zeigen Sie: Die allgemeine Lösung der zwei-Teilchen Schrödingergleichung lässt sich als lineare Superposition von Produktvektoren der Gestalt $|\Phi(t)\rangle \otimes |\psi(t)\rangle$ darstellen, wobei die Faktoren $|\Phi(t)\rangle$ bzw. $|\psi(t)\rangle$ Vektoren im Hilbertraum der Schwerpunkts- bzw. Relativbewegung sind. Insbesondere gilt aufgrund der Separierbarkeit des Hamiltonoperators, vgl. (21),

$$i\hbar|\dot{\Phi(t)}\rangle = \frac{\hat{\vec{P}}^2}{2M}|\Phi(t)\rangle\,, \tag{22}$$

$$i\hbar|\dot{\psi(t)}\rangle = \left[\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + V(|\hat{\vec{q}}|)\right]|\psi(t)\rangle\,. \tag{23}$$

Der Fachschaftsrat MaPhy bittet um Kenntnisnahme:

- LAN-Party—3.6.—17 Uhr—2.28.0.102/104
- MaPhy-Sportfest—Juni—Sportplatz am Neuen Palais