Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2016) -

Übungsblatt 09 ($20 + \pi^e$ Punkte)[1]

Ausgabe 06.06.16 – Abgabe 14.06.16 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ **Aufgabe 1** Ritz'sches Theorem] (4 Punkte)

Beweisen Sie das Ritz'sche Theorem wonach das Funktional $E[\psi] = \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle/\langle\psi|\psi\rangle$ genau dann stationär, $\delta E[\psi] = 0$, wenn $\psi = \psi_0$ Eigenvektor von $\hat{H}$, etwa $\hat{H}\psi_0 = E_0\psi_0$. Schließen Sie aus diesem Theorem $E[\psi] \geq E_0$, wobei E_0 die Grundzustandsenergie. Stöbern Sie im Lehrbuch und geben eine Anwendung an.

▷ **Aufgabe 2 (Grundzustandsanergie mittels Ritz)*** (4 Punkte)

Schätzen Sie mittels Ritz'schem Theorem die Grundzustandsenergie eines Elektrons im Coulombfeld des Z-fach geladenen Kern ab. Benutzen Sie als Variationsansatz $\propto e^{-\kappa r}$ mit κ Variationsparameter. Wie vergleicht sich Ihr Ergebnis mit dem exakten Wert?

▷ **Aufgabe 3 (Addition von Bahndrehimpuls und Spin-$\frac{1}{2}$)** (12 Punkte)

[Klausurelevant? Nicht in dieser Form – aber die Kopplung $\ell = 1$ an $s = 1/2$ könnte durchaus "dran" kommen ...]

Wird beim Wasserstoffproblem auch der Spin der Elektrons berücksichtigt ist mit

$$\hat{\vec{j}} := \hat{\vec{l}} + \hat{\vec{s}} \tag{1}$$

der Gesamtdrehimpuls des Elektrons verabredet.

Gemeinsame Eigenzustände zu $\hat{\vec{j}}^2$, $\hat{j}_z$, $\hat{\vec{\ell}}^2$ und $\hat{\vec{s}}^2$ werden notiert $|jm_j\ell s\rangle$, wenn nötig Kommata zwischen den Einträgen, worin Quantenzahlen j, m_j, ℓ und s definitiosgemäß

$$\begin{aligned} \hat{\vec{j}}^2|jm_j\ell s\rangle &= \hbar^2 j(j+1)|jm_j\ell s\rangle\,, \qquad & \hat{j}_z|jm_j\ell s\rangle &= \hbar m_j|jm_j\ell s\rangle\,, \\ \hat{\vec{\ell}}^2|jm_j\ell s\rangle &= \hbar^2\ell(\ell+1)|jm_j\ell s\rangle\,, \qquad & \hat{\vec{s}}^2|jm_jls\rangle &= \hbar^2 s(s+1)|jm_jls\rangle\,, \end{aligned} \tag{2}$$

Der Wert von s liegt natürlich fest, $s = \frac{1}{2}$, der Wertebereich von ℓ ist variabel $\ell = 0, 1, 2, \ldots$. Zu jedem ℓ (mit Ausnahme $\ell = 0$) gibt es zwei mögliche Werte $j = \ell \pm \frac{1}{2}$. Für $\ell = 0$ gibt es nur ein $j = \frac{1}{2}$.

Das Ziel ist es, die $|jm_jls\rangle$ durch eine Linearkombination der Produktzustände $|\ell m_\ell; s\mu\rangle := |\ell m_\ell\rangle \otimes |s\mu\rangle$ auszudrücken, wobei Quantenzahlen m_ℓ und μ definitionsgemäß $\hat{l}_z|\ell m_\ell s\mu\rangle = \hbar m_\ell|\ell m_\ell s\mu\rangle$, $m_\ell = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell$, und $\hat{s}_z|\ell m_\ell s\mu\rangle = \hbar\frac{\mu}{2}|\ell m_\ell s\mu\rangle$ mit $\mu = \pm 1$. In jedem Fall $m_j = -j, -j+1, \ldots, j$.

Zeigen Sie: Für $\ell = 1, 2, \ldots$

$$|\ell \pm \tfrac{1}{2}, m_j; \ell, \tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{\ell + \frac{1}{2} + m_j}{2\ell + 1}}|\ell, m_j \mp \tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}\pm\rangle \pm \sqrt{\frac{\ell + \frac{1}{2} - m_j}{2\ell + 1}}|\ell, m_j \pm \tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}\mp\rangle \tag{3}$$

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

und für $\ell = 0$

$$|\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}; 0\tfrac{1}{2}\rangle = |0, 0\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}\pm\rangle \,. \tag{4}$$

Spektroskopisch notiert man die m_j-Multipletts in der Form $n\ell_j$, etwa $2p_{\frac{1}{2}}$ oder $2p_{\frac{3}{2}}$. In der Grobstruktur ("Kepler-Atom") sind diese beiden Niveaus anergetisch entartet. Wird die Wechselwirkung des Spins mit dem Bahndrehimpuls in der Feinstruktur erfasst, wird diese Entartung aufgehoben.

▷ **Aufgabe 4 (Wohnst-Du-noch)** (π Punkte)

Bei einem Möbelhaus Ihrer Wahl kaufen Sie Spin-1/2 Teilchen. Beim Auspacken stellen Sie fest, dass man vergessen hat, den Zustand auf dem Beipackzettel anzugeben. Geben Sie ein Verfahren an, um den Zustand der erworbenen Teilchen zu charakterisieren. Zur Verfügung steht Ihnen ein Stern-Gerlach Magnet mit variabler Orientierung.