

Theoretische Physik III - Quantenmechanik (SoSe 2016) -

Übungsblatt 12 (20 + π Punkte)¹

Ausgabe 27.06.16 – Abgabe 05.07.16 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1 (Gesellige Bosonen)

(4 Punkte)

Bosonen unterliegen nicht dem Pauli-Verbot, und so könnte man meinen, Bosonen seien ziemlich gewöhnliche Zeitgenossen. Das ist aber ein Irrtum: während sich Fermionen gegenseitig aus dem Weg gehen, sind Bosonen über die Maßen gesellige Wesen. Betrachten wir das einfache Beispiel zweier Bosonen, die zwei orthogonale Orbitale ϕ und χ besetzen können. Wären die beiden Teilchen unterscheidbar – man nennt sie dann *Boltzonen* –, so könnte das Zwei-Teilchensystem in einem der vier Zustände $\phi\phi$, $\phi\chi$, $\chi\phi$ oder $\chi\chi$ gefunden werden, in der Hälfte der Fälle also im gleichen Zustand.

Zeigen Sie, dass wenn es sich bei den beiden um Bosonen handelt, sie in 2/3 der Fälle im gleichen Zustand zu finden sind.

Bemerkung: Verglichen mit ihren klassischen Vettern, den *Boltzonen*, habe Bosonen also eine natürliche Tendenz zusammen zu klumpen, engl *bunching*. Diese Tendenz, die sich allerdings erst bei niedrigen Temperaturen bemerkbar macht, ist für viele interessante Effekte der Tieftemperaturphysik verantwortlich, angefangen bei der Bose-Einstein Kondensation bis hin zur Supraleitung. Wem der Gang in ein Tieftemperaturlabor zu anstrengend ist, kann wahlweise auch mal in der Photonik vorbeischauchen. Auch die Photonen die beispielsweise von einem Laser erzeugt werden, haben die Tendenz zu Klumpen ...

▷ Aufgabe 2 (HO mit Heisenberg)

(4 Punkte)

[“Pflicht” und klausurrelevant ...]

Wir betrachten den harmonischen Oszillator im konstanten Kraftfeld. Die Hamiltonfunktion lautet

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 - Fq \quad (1)$$

mit F eine reelle Konstante.

- Stellen Sie die klassischen Bewegungsgleichungen auf. Geben Sie die allgemeine Lösung an.
- Quantisieren Sie das System. Stellen Sie die Heisenberg’schen Bewegungsgleichungen auf, und geben Sie die Lösung an.

Hinweis: Es ist hilfreich beizeiten ein quadratische Ergänzung vorzunehmen, $\frac{m\omega^2}{2}q^2 - Fq = \frac{m\omega^2}{2} \left(q - \frac{F}{m\omega^2} \right)^2 - \frac{F^2}{2m\omega^2}$.

¹Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

▷ **Aufgabe 3 (Zwei-Niveau Atom im Lichtfeld)** (12 Punkte)

Das “Zwei-Zustands System”, auch genannt “2-Niveau Atom”, “Spin im Magnetfeld” oder “qubit” ist charakterisiert durch einen zwei-dimensionalen Hilbertraum mit Basiszuständen $|e\rangle, |g\rangle$ (im Kontext Atomphysik) und einen Hamiltonoperator, der – in der sog *Drehwellennäherung* – formuliert werden kann

$$\hat{H}(t) = \hbar\omega_0\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} + \frac{\hbar\Omega_0}{2}e^{i\omega t}\hat{\sigma} + \frac{\hbar\Omega_0^*}{2}e^{i\omega t}\hat{\sigma}^\dagger \quad (2)$$

worin $\hat{\sigma} = |g\rangle\langle e|$.

- (a) Ich behaupte, die durch \hat{H} beschriebene Dynamik haben Sie schon mal analysiert. Wann war das, und in welchem Kontext?
- (b) Wie lauten die Heisenberg-Bewegungsgleichungen der Operatoren $\hat{\sigma}, \hat{\sigma}^\dagger$?
- (c) Welche physikalische Bedeutung haben die Erwartungswerte von $\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^\dagger$ und $\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}$?
- (d) Die explizite Zeitabhängigkeit von $\hat{H}(t)$ ist natürlich unangenehm. Um damit fertig zu werden empfiehlt sich ein Wechselwirkungsbild mit “ungestörtem” Hamiltonoperator $\hat{H}_0 := \hbar\omega\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}$. Wie transformiert sich $\hat{H}(t)$ unter diesem Bildwechsel? Ist es möglich, dass im Wechselwirkungsbild die Schrödingergleichung für den transformierten Zustand $|\tilde{\psi}(t)\rangle := e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}|\psi(t)\rangle$ in etwa lautet $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\tilde{\psi}\rangle = \tilde{H}|\tilde{\psi}\rangle$ mit

$$\tilde{H} = \hbar(\omega_0 - \omega) + \frac{\hbar\Omega_0}{2}\hat{\sigma} + \frac{\hbar\Omega_0^*}{2}\hat{\sigma}^\dagger \quad (3)$$

- (e) Für ein Atom das sich anfänglich im Grundzustand befindet bestimme man die W'keit, dass es zur Zeit t im angeregten Zustand gefunden wird.
- (f) Zum Hamiltonoperator \tilde{H} kann man natürlich auch wieder die entsprechenden Heisenbergschen Bewegungsgleichungen aufstellen – und sogar lösen! Wir bitten darum
...

▷ **Aufgabe 4 (Länderfusion Berlin-Brandenburg)** (π Punkte)

In Berlin und in Potsdam hat man je ein Elektron in einer Falle eingesperrt und dort präpariert – in Potsdam im Zustand $|\phi\rangle$, in Berlin im Zustand $|\chi\rangle$. Die Potsdamer nennen ihr Elektron liebevoll “Fritzchen”, die Berliner das ihrige zärtlich “Marlene”. In der Länderfusionskommission wird der Zustand des Zwei-Elektronensystems gemäß

$$|\Psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle \quad (4)$$

zu den Akten genommen, wobei der erste Faktor den Zustand von Fritzchen, der zweite Faktor den Zustand von Marlene beschreibt.

Da kommt ein naseweiser Professor, und behauptet das ganze wäre unzulässig – schließlich wären Elektronen grundsätzlich ununterscheidbare Fermionen. Der Zustand müsse also in Form

$$|\Psi\rangle \propto |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle - |\chi\rangle \otimes |\phi\rangle \quad (5)$$

notiert werden, und von “Fritzchen” und “Marlene” dürfe man gleich garnicht reden.

Angesichts Ihrer erstklassigen Ausbildung in Physik werden Sie nun zum Schiedsrichter berufen und sollen den Streit schlichten. Hat der Professor Recht oder kann man mit der Entscheidung der Länderfusionskommission leben?