Mathematische Bissen
- Gruppentheorie für PhysikerInnen -

Ausgabe 21.04.17 – Abgabe 28.04.17 – Besprechung 28.04.17

▷ Aufgabe 1 (Ja oder Nein) (1 Punkt)

Es sei $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen incl 0; jemand behauptet $(\mathbb{N}_0, +, 0)$ bilde eine Gruppe. Sie

- ☐ stimmen zu
- ☐ stimmen nicht zu

▷ Aufgabe 2 (Dimension von Matrixgruppe I) (1 Punkt)

Die Dimension der generell linearen Gruppe $GL(n, \mathbb{C})$ ist

- ☐ n, schließlich sind das n-dimensionale Matrizen
- ☐ n^2, schließlich haben die n^2 Elemente
- ☐ $2n^2$, schließlich gibt es Real- und Imaginärteil

▷ Aufgabe 3 (Dimension von Matrixgruppen II) (2 Punkte)

Die $SO(n)$ ist Menge aller unimodularen reellen $n \times n$-Matrizen (Matrizen mit Determinante 1) deren Transponierte gleich dem Inversen.

Zeigen Sie, dass die $SO(n)$ mit Verknüpfung "Matrixmultiplikation" und Neutralelemet "Einheitsmatrix" eine $n(n-1)/2$-dimensionale Gruppe bilden.

▷ Aufgabe 4 (Dimension von Matrixgruppen III) (2 Punkte)

Die $SU(n)$ ist Menge aller unimodularen komplexen $n \times n$-Matrizen (Matrizen mit Determinante 1) deren Adjungierte gleich dem Inversen.

Zeigen Sie, dass die $SU(n)$ mit Verknüprung "Matrixmultiplikation" und Neutralelemet "Einheitsmatrix" eine $n^2 - 1$-dimensionale Gruppe bilden. Für welche Paare m, n hat die $SU(m)$ die gleiche Dimension wie die $SO(n)$?

▷ Aufgabe 5 (Gruppen der Ordnung 3) (2 Punkte)

Zeigen Sie: Es gibt genau eine abstrakte Gruppe der Ordnung 3, und die ist isomorph C_3. Geben Sie ein Handvoll Realisierungen an.

▷ Aufgabe 6 (Gruppen der Ordnung 4) (3 Punkte)

Zeigen Sie: Es gibt genau zwei abstrakte Gruppe der Ordnung 4, eine isomorph C_4, die andere isomorph $V_4 \cong C_2 \otimes C_2$, sog *Klein'sche Vierergruppe*.

▷ Aufgabe 7 (Gruppen der Ordnung n) (3 Punkte)

Zeigen Sie: Jede Gruppe G, deren Ordnung n eine Primzahl ist, ist isomorph zur zyklischen Gruppe C_n, $G \cong C_n$.