Optik an Grenzflächen und Nanostrukturen Sommersemester 2017

Carsten Henkel

Übungsblatt 1 Ausgabe: Do 20 Apr 17

Eingabe: Fr 28 Apr 17

Aufgabe 1.1 – Mikro und Makro, handliche Zahlen (7 Punkte)

Schätzen Sie die Zahl N von Elektronen in einem Volumen $1\,\mathrm{nm}^3$ oder $(10\,\mathrm{nm})^3$ Glas oder Metall ab. Wie groß ist $N^{-1/2}$? (Faustregel aus der statistischen Physik für relative Fluktuationen von typischen Größen)

Die Experten aus der *cluster*-Physik erzählen uns, dass Natrium-*cluster* ab einer Größe von etwa 10 Atomen bereits metallische Eigenschaften zeigen und 'makroskopisch' beschrieben werden können. Wie groß ist so ein *cluster*?

Finden Sie die Wellenlänge $x\,\mu\mathrm{m}$ von Licht, bei der die Photonen-Energie genau $x\,\mathrm{eV}$ ist. Wozu kann man diese Zahl x gebrauchen? – Dieselbe Aufgabe für die Wellenlänge $y\,\mathrm{nm}$ in Nanometern und die Photonen-Energie in $y\,\mathrm{kJ/mol}$ (eine beliebte Einheit unter Chemikern, deren $\mathrm{kcal/mol}$ wir hier mal weglassen).

Lösung. Siehe Python-Skript, das die entsprechenden Zahlen ausrechnet. Wir lernen dabei: in $(10\,\mathrm{nm})^3$ sind bereits so viele Teilchen (Elektronen etc.) enthalten, dass die statistischen Fehler einer makroskopischen Beschreibung kleiner als 1% sind. Umgekehrt hat die Halbleiter-Industrie Problem mit der "Körnigkeit" der Materie, wenn Strukturen deutlich kleiner als $10\,\mathrm{nm}$ werden (also etwa in den nächsten 10 Jahren).

Aufgabe 1.2 – Licht im Badezimmer (7 Punkte)

Seit Maxwell und Hertz wissen wir, dass Licht durch elektrische und magnetische Felder beschrieben wird. Überlegen Sie, dass

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}\, \exp \mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t) + \mathrm{c.c.} \tag{1.1}$$

ein elektrisches Feld beschreibt. ('+ c.c.' = addiere den komplex konjugierten Ausdruck.) Erklären Sie, was für Größen die Buchstaben $\mathbf{E}$, $\mathbf{r}$, t, usw. beschreiben. Geben Sie eine Formel an, die die Frequenz (in THz und in eV) dieses Felds beschreibt. Genauso für die Wellenlänge.

Nehmen Sie an, dass in dem Glas Ihres Spiegels im Badezimmer ein elektrisches Feld wie in Gl.(1.1) vorliegt. Was ist die Beziehung zwischen $\mathbf{k}$ und ω? Bekanntlich sind Spiegel in Badezimmern auf der Rückseite metallisch beschichtet. Nehmen Sie ein Koordinatensystem an, in dem die z-Achse senkrecht auf der Grenzfläche Glas-Metall steht (zeigt vom Metall ins Glas) und geben Sie $\mathbf{k}$ und $\mathbf{f}$ so an, dass Gl.(1.1) ein Stück von dem Licht beschreibt, das unter einem Winkel von, sagen wir, 50° von der Deckenlampe einfällt. (Mehrere Lösungen sind möglich.) Geben Sie in demselben Koordinatensystem einen weiteren $\mathbf{k}$-Vektor an, der das Licht beschreibt, das vom Spiegel reflektiert wurde. Wie dürfen Sie $\mathbf{f}$ wählen?

Mehrfache Reflexionen an Spiegeln können Sie in einigen Fahrstühlen beobachten. Schätzen Sie ab, wie groß der Reflexionskoeffizient eines Metallspiegels ist und wie viele Spiegelbilder Sie sehen können. Was sagen die Bücher zur Optik zu dieser Frage?

Lösung. Zu den Spiegelbildern: wir werden in der Vorlesung sehen, warum eine metallische Oberfläche nur ca. $95\,\%$ der Licht-Intensität reflektiert (und nicht noch mehr). Wenn man relativ willkürlich ansetzt, dass das Auge bei $10\,\%$ der einfallenden Intensität 'nichts mehr' wahrnimmt, kommt man auf ca. 20–50 Spiegelbilder, je nachdem ob man pro Bild eine oder zwei Reflexionen berücksichtigt ('von vorne und von hinten').

Aufgabe 1.3 – Intensität, Feldstärke und so weiter (6 Punkte)

Das elektrische Feld aus Gl.(1.1) beschreibt einen reellen Vektor (warum?) an jedem (Zeit)Punkt $\mathbf{r}, t$. Berechnen Sie für den Punkt $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ die Länge und die Richtung dieses Vektors als Funktion der Zeit t. Sie dürfen zur Vereinfachung annehmen, dass $\mathbf{f}$ reell ist. Welche Einheit hat die Länge?

Die Intensität des Lichts wird häufig in mW/cm^2 (SI: W/m^2) gemessen und hängt mit dem Quadrat des elektrischen Felds zusammen:

$$I(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 c |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 \tag{1.2}$$

Überprüfen Sie, dass die Einheiten in dieser Gleichung konsistent sind. Zeigen Sie, dass $I(\mathbf{r}, t)$ eine Summe aus zwei Termen ist: ein konstanter Term und einer, der bei der Frequenz 2ω oszilliert. Zeigen Sie, dass der konstante Term auch der ist, der nach der Mittelung über eine optische Periode $T = 2\pi/\omega$ übrig bleibt. Wenn wir diese Mittelung durch einen Querstrich notieren, zeigen Sie, dass für die ebene Welle aus Gl.(1.1) gilt

$$\overline{I(\mathbf{r}, t)} = 2\varepsilon_0 c |\mathbf{f}|^2 \tag{1.3}$$

Berechnen Sie die typische Amplitude des elektrischen Felds für einen Lichtstrahl mit $100\,$mW/cm^2 und vergleichen Sie mit dem Feld in einem Plattenkondensator von der Größe einer 1.5 V Batterie.

Lösung. Der Faktor $\varepsilon_0 c$ fehlte im Aufgabentext von Gl.(1.3).

Mit der Intensität einer Lichtquelle ist typischerweise die zeitlich gemittelte Intensität gemeint. Wir erhalten für die Länge des Vektors $\mathbf{f}$ (siehe Python-Skript):

$$|\mathbf{f}| = \sqrt{\frac{\bar{I}}{2\varepsilon_0 c}} \simeq 434\,\mathrm{V/m} \tag{1.4}$$

Im Plattenkondensator kann man grob abschätzen, dass Spannung U, Größe r und elektrisches Feld E mit

$$E = \frac{U}{r} \tag{1.5}$$

zusammen hängen. Also für $r = 5\,\mathrm{mm}$ und $U = 1.5\,\mathrm{V}$: $E = 300\,\mathrm{V/m}$, in etwa vergleichbar. Wenn das Feld in dieser Weise berechnet wird, braucht man nicht über die Ladung in der Batterie (Stichwort 'Kapazität') und das Medium zwischen den Kondensatorplatten (Stichwort 'Abschirmung') nachdenken. Auf jeden Fall liegen auf den 'Kondensatorplatten' einer Batterie aber mehr als ein Elektron! Ein Akku mit 1000 mAh (schauen Sie auf einen Akku nach) enthält z.B. $1\,\mathrm{A} \cdot 3600\,\mathrm{s} = 3600\,\mathrm{C}$ an Ladung. Um daraus ein elektrisches Feld abzuschätzen, muss man auch etwas über die Anordnung der Elektroden in der Batterie kennen. Wenn man sich in einer zylindrischen Batterie einen ganz einfachen Plattenkondensator mit 'aufgerollten Platten' (zwei konzentrische Zylinder) denkt, erhält man das gigantische Feld:

$$E = \frac{\text{Ladung}}{\text{Fläche} \times \varepsilon} = \frac{3600\,\mathrm{C}}{2\pi\, 0.5\,\mathrm{cm} \times 5\,\mathrm{cm} \times \varepsilon} \simeq \frac{2\,300\,\mathrm{C/m^2}}{\varepsilon} \simeq 2.6 \times 10^{14}\,\mathrm{V/m}\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \tag{1.6}$$

Vermutlich wird in der Batterie also mit einer 'blättrigen' Struktur eine viel größere Fläche verwendet, und das elektrische Feld durch ein geeignetes Medium mit $\varepsilon \gg \varepsilon_0$ herabgesetzt.