Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2017) -

Übungsblatt 02 ($20 + \pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 24.04.17 – Abgabe 02.05.17 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ **Aufgabe 1 (Teilchen in der Kiste)*** (8 Punkte)

Ein Teilchen sei in einer würfelförmigen Kiste der Kantenlänge L frei beweglich eingeschlossen.

(a) Bestimmen Sie die Energieniveaus und Eigenfunktionen. Zeigen Sie, daß die Energie-Eigenwerte (Energieniveaus) durch die Gleichung

$$E_{klm} = \epsilon\left((l+1)^2 + (m+1)^2 + (n+1)^2\right) , \qquad l, m, n = 0, 1, 2, \dots , \tag{1}$$

mit $\epsilon = \hbar^2\pi^2/(2mL^2)$ gegeben sind, und die dazugehörigen Energie-Eigenfunktionen

$$\varphi_{klm}(x, y, z) = \left[\frac{2}{L}\right]^{\frac{3}{2}} \sin(k_l x)\sin(k_m y)\sin(k_n z) , \qquad k_l = \frac{(l+1)\pi}{L} \text{ etc} , \tag{2}$$

wobei die Kiste mit der unteren Ecke links vorne im Koordinatenursprung plaziert.

(b) Welchen Druck übt das Teilchen im Grundzustand auf die Wände aus?
<u>Zur Erinnerung:</u> "Druck" ist "Kraft pro Fläche". "Kraft" ist "Arbeit pro Wegstrecke", und "Arbeit" ist sowas wie Energie. Bestimmen Sie also zunächst die Änderung der Grundzustandsenergie bei infinitesimaler Verschiebung einer der Wände.

(c) Wie groß dürfte $\hbar$ allenfalls sein, um beim Öffnen handelsüblicher Melonen durch umherfliegende Melonenkerne nicht in Lebensgefahr zu geraten? Als theoretische Physikerin dürfen Sie annehmen, dass handelsübliche Melonen würfelförmig sind – was sie ja auch sind, vgl. Abbildung.

(d) Überzeugen Sie sich davon, dass (i) die Energie-Niveaus um so dichter beieinander liegen, je größer die Kiste ist, und (ii) je höher die Energie, desto mehr Niveaus befinden sich in ihrer Nachbarschaft. Man sagt, im Grenzfall $L \to \infty$ entstehe ein quasi-kontinuierliches Energiespektrum. Bestimmen Sie für diesen Fall die Zustandsdichte, d.h. die Zahl der Niveaus, deren Energie im Energie-Intervall dE um E liegt.

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft …

▷ **Aufgabe 2 (Ein kleiner Satz)** (3 Punkte)

Sei $\hat{T}$ linearer Operator in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, und $\hat{T}^\dagger$ der zu $\hat{T}$ adjungierte Operator. Beweisen Sie die nützliche Ungleichung

$$\langle \hat{T}^\dagger \hat{T} \rangle \geq 0\,. \tag{3}$$

▷ **Aufgabe 3 (Unschärferelationen)** (4 Punkte)

Sie erinnern sich an die Varianz (Unschärfe) einer Observable, $\delta A := [\langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle]^{1/2}$.

Seien nun $\hat{A}$, $\hat{B}$ zwei selbstadjungierte Operatoren mit Kommutator

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}\,. \tag{4}$$

Beweisen Sie die folgend wichtige Ungleichung für das Produkt der Varianzen

$$\delta A \delta B \geq \frac{1}{2} |\langle \hat{C} \rangle|\,. \tag{5}$$

<u>Hinweis:</u> Machen Sie von Aufgabe 1 Gebrauch. Setzen Sie dort $\hat{T} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle + i\lambda(\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle)$ und minimieren bezüglich λ.

▷ **Aufgabe 4 (Zustand minimaler Unschärfe)** (5 Punkte)

Für ein Punktteilchen im $\mathbb{R}$ mit kanonischem Kommutator $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ wird aus Aufgabe 2 die *Heisenberg'sche Unschärferelation*,

$$\delta q \delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{6}$$

Ein Zustand bei dem hier Gleichheit herrscht heißt *Zustand minimaler Unschärfe* (engl: minimum uncertainty state). Zeigen Sie, daß der allgemeinste Zustand minimaler Unschärfe in der Ortsdarstellung durch eine Gaussfunktion beschrieben wird.

<u>Hinweis:</u> Betrachte Beweis zu Aufgabe 2. Setze o.B.d.A. $\langle \hat{q} \rangle = \langle \hat{p} \rangle = 0$; minimal heißt dann neben $\lambda = \hbar/(2\delta p^2)$ auch $\langle \hat{T}^\dagger \hat{T} \rangle) = 0$, also $\hat{T}\psi_{\text{min}} = 0$. Auswertung dieser Gleichung in Ortsdarstellung liefert den gesuchten Beweis.

▷ **Aufgabe 5 (Ankunftszeit)** (π Punkte)

Für ein Teilchen mit einem räumlichen Freiheitsgrad (Ort q, Impuls p) vermittelt die Phasenraumfunktion

$$T(q,p) := -\frac{mq}{p} \tag{7}$$

die sog *Ankunfstzeit* des freien Teilchens im Ursprung $x = 0$. Begründen Sie die Taufe.

Erinnern Sie sich jetzt bitte an das Korrespondenzprinzip um einen Operator "Ankunftszeit"

$$\hat{T} := -m\hat{p}^{-1/2}\hat{q}\hat{p}^{-1/2} \tag{8}$$

für die Quantenmechanik zu verabreden.

(a) Ist dieser Operator auf einem geeignet gewählten Definitionsbereich $\mathcal{D}_T \subseteq \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, dx)$ symmetrisch? Gar selbstadjungiert? Wo gibt es Probleme?

(b) Was wären die verallgemeinerten Eigenfunktionen bzw Eigenwerte?

Hinweis: Vielleicht arbeiten Sie in der Impulsdarstellung ...

Ein Theorem von Pauli besagt, dass es für Hamiltonoperatoren $\hat{H}$, die nach unten beschränkt sind, es keinen selbstadjungierten Operator "Zeit" $\hat{t}$ gibt mit $[\hat{H}, \hat{t}] = i\hbar$. Die legendäre "Energie-Zeit" Unschärferelation (im Lehrbuch nachschlagen) lässt sich demzufolge nicht im Sinne der Heisenbergschen Unfschärferelation verstehen ...

(c) Berechnen Sie nun den Kommutator $[\hat{H}, \hat{T}]$ für freie Teilchen $\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2$. Konfrontieren Sie Ihr Resultat mit Paulis Theorem. Nun noch mal die Frage: ist $\hat{T}$ selbstadjungiert?

Bemerkung: Diese Aufgabe dient der Bildung. "Zeit" – im Gegensatz zu "Ort" ist grundsätzlich *keine* Observable, keine Messgrösse. Ein Teilchen befindet sich möglicherweise an einem Ort (relativ zu anderen Teilchen), und hat möglicherweise Impuls, Energie, Drehimpuls oder Spin, aber es hat halt keine "Zeit". Wenn Sie auf die Uhr schauen messen Sie nicht "die Zeit", sondern die Position des Zeigers. Und wenn Sie noch mal hinschauen, und der Zeiger steht woanders, dürfen Sie aus der Differenz der Positionen auf eine Dauer schließen – nicht auf "Zeit". Vgl auch mein Editorial zu "Portal Wissen: Zeit" (Universität Potsdam 2014).