Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SoSe 2013) -

Übungsblatt 06 ($18 + \pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 16.05.13 – Abgabe 21.05.13 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ **Aufgabe 1 (3D Harmonischer Oszillator)** (6 Punkte)

Man bestimme die Eigenfunktionen und Eigenwerte des isotropen harmonischen Oszillators mittels (1) Separation in kartesischen Koordinaten und (2) Separation in Kugelkoordinaten. Man finde eine Formel für den Entartungsgrad der Eigenwerte und klassifiziere das Spektrum nach (1) kartesischen Anregungsquantenzahlen und (2) Drehimpulsquantenzahlen.

▷ **Aufgabe 2 (Auswahlregeln)** (6 Punkte)

Die Wechselwirkung (engl. interaction) eines Atoms mit dem elektrischen Feld wird in der sog Dipolnäherung beschrieben

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\vec{E} \cdot \hat{\vec{D}} \tag{1}$$

worin $\hat{\vec{D}}$ der Vektoroperator Dipolmoment, im Falle atomaren Wasserstoffs $\hat{\vec{D}} = -e\hat{\vec{q}}$.

Für atomaren Wasserstoff (ohne Spin): Berechnen Sie die Matrixelemente $\langle nlm|\hat{H}_{\text{int}}|n'l'm'\rangle$. Überzeugen Sie sich insbesondere von den sog *Auswahlregeln*

$$\Delta l \equiv l - l' = \pm 1\,, \qquad \Delta m \equiv m - m' = 0, \pm 1\,. \tag{2}$$

Auswahlregeln spielen eine prominente Rolle bei der Wechselwirkung von Materie (= Haufen von Atomen) mit Licht. Lesen Sie aus den Auswahlregeln eine Hypothese für den Eigendrehimpuls (=Spin) des Photons ab.

▷ **Aufgabe 3 (Messwertverteilungen Wasserstoffelektron)** (6 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie die Wellenfunktion des Grundzustandes eines Wasserstoffelektrons (ohne Spin) kennengelernt,

$$\psi_{1,0,0}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}\,, \tag{3}$$

wobei a_0 Bohr'scher Radius.

(a) Wie lautete die Wahrscheinlichkeitsdichte, bei einer Ortsmessung das Elektron im Abstand a vom Kern zu finden? Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte!

(b) Zeigen Sie, daß die Wellenfunktion des Grundzustandes in der Impulsdarstellung durch

$$\tilde{\psi}(\vec{k}) = \frac{2^{3/2}}{\pi} \frac{1}{a_0^{5/2}} \frac{1}{\left(k^2 + a_0^{-2}\right)^2} \tag{4}$$

gegeben ist.

---

[1]Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft …

(c) Wie lautet die Wahrscheinlichkeitsdichte, bei einer Impulsmessung die Wellenzahl $k = |\vec{k}|$ zu finden (Erinnerung: $\vec{p} = \hbar\vec{k}$)?

▷ **Aufgabe 4 ($\hbar$ im Labor . . .)** (π Punkte)

Angenommen Sie haben gerade ein Doppelspaltexperiment zum Nachweis von Materiewellen aufgebaut. Erste Probeläufe mit monochromatischen Teilchen ergeben einen Streifenabstand a. Sie lassen das Experiment über Nacht laufen und gehen zu Bett. Am nächsten Morgen lesen Sie in der Zeitung, jemand habe über Nacht den Wert von $\hbar$ geändert, alle anderen Naturkonstanten (Elementraladung e, Lichtgeschwindigkeit c etc) jedoch nicht angerührt. Auf dem Weg zum Labor kommen Sie zu der Überzeugung, eine Änderung von $\hbar$ müsse sich in einem veränderten Streifenabstand niederschlagen. “Schließlich” – so Ihr Argument – “bedeute die De-Broglie Beziehung $\lambda = 2\pi\hbar/p$ eine lineare Abängigkeit der Wellenlänge, und damit des Streifenabstandes, von $\hbar$.” Vor dem Labor angekommen plagen Sie leise Zweifel. Endgültige Gewissheit bringt nur ein Blick auf die Messdaten – und die besagen WAS?

Bemerkung: Beachten Sie, daß sich bei Änderung von $\hbar$ alle möglichen Dinge ändern, beispielsweise die Größe eines Atoms (gemessen relativ – zu was?). Das einzige was sich sicherlich nicht ändert ist der Wahrheitsgehalt von Aussagen wie “In dieser Kiste befinden sich 17 Kartoffeln”.

Sie dürfen sich auch ruhig mal den Spaß machen, andere PhysikerInnen mit der Frage zu belästigen . . . .